

**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAMDA YARI SONSUZ  
BİR YÜZEYE ETKİ EDEN SİNÜZOİDAL YAYILI YÜK İÇİN  
ANALİTİK BİR ÇÖZÜM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Nuri Kerem BİNARK**

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı**

**Katı Cisimlerin Mekaniği Programı**

**HAZİRAN 2019**



**İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAMDA YARI SONSUZ  
BİR YÜZEYE ETKİ EDEN SİNÜZOİDAL YAYILI YÜK İÇİN  
ANALİTİK BİR ÇÖZÜM**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Nuri Kerem BİNARK  
(503091529)**

**Makina Mühendisliği Anabilim Dalı  
Katı Cisimlerin Mekaniği Programı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mehmet Salih DOKUZ**

**HAZİRAN 2019**



İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503091529 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Nuri Kerem BİNARK, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAMDA YARI SONSUZ BİR YÜZEYE ETKİ EDEN SİNÜZOİDAL YAYILI YÜK İÇİN ANALİTİK BİR ÇÖZÜM” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

**Tez Danışmanı :**      **Prof. Dr. Mehmet Salih DOKUZ** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Jüri Üyeleri :**      **Doç. Dr. Mesut KIRCA** .....  
İstanbul Teknik Üniversitesi

**Prof.Dr. Hasan Volkan ERSOY** .....  
Yıldız Teknik Üniversitesi

**Teslim Tarihi :**      **3 Mayıs 2019**  
**Savunma Tarihi :**      **13 Haziran 2019**





*Aileme,*



## ÖNSÖZ

Lisansüstü tezimi hazırlama süreci boyunca desteğini benden eksik etmeyen herkese teşekkür ediyorum. Üzerimde emeği olan bütün hocalarımı ve ailemi saygıyla anıyorum. Bu süreç boyunca bana sabır gösterip her seferinde yardımcı olan Sayın Prof. Dr. Mehmet Salih DOKUZ hocama en içten dileklerle şükranlarımı sunuyorum.

Haziran 2019

Nuri Kerem Binark  
(Makina Mühendisi)



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                                                                    |      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| ÖNSÖZ.....                                                                                                         | vii  |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                                                  | ix   |
| SEMBOLLER .....                                                                                                    | xi   |
| ÇİZELGE LİSTESİ.....                                                                                               | xiii |
| ŞEKİL LİSTESİ.....                                                                                                 | xv   |
| ÖZET.....                                                                                                          | xvii |
| SUMMARY .....                                                                                                      | xix  |
| 1. GİRİŞ .....                                                                                                     | 1    |
| 1.1 Tezin Amacı .....                                                                                              | 1    |
| 1.2 Literatür Araştırması .....                                                                                    | 1    |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR VE DENKLEMLER.....                                                                              | 3    |
| 2.1 Tekil Elastik Ortam İçin Lineer Bünye Denklemleri .....                                                        | 3    |
| 2.2 Tekil Ortam İçin Galerkin Vektörü Çözümü .....                                                                 | 6    |
| 2.3 Tekil Ortam İçin Love Şekil Değiştirme Fonksiyonu .....                                                        | 8    |
| 2.4 Tekil Elastik Ortam İçin Sinüzoidal Yayılı Yük Problemi .....                                                  | 11   |
| 3. İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN KARIŞIM ORTAMI .....                                                                 | 15   |
| 3.1 İki Elastik Katıdan Oluşan Karışım Ortamı İçin Lineer Bünye Denklemleri ..                                     | 15   |
| 3.2 Bünye Denklemlerindeki Bilinmeyen Katsayılarının Hesaplanması.....                                             | 18   |
| 3.2.1 Basit çekme problemi.....                                                                                    | 19   |
| 3.2.2 Kayma gerilmesi problemi.....                                                                                | 21   |
| 3.2.3 Hidrostatik basınç problemi .....                                                                            | 21   |
| 3.3 Karışım Ortamı İçin Galerkin Vektörü Çözümü.....                                                               | 22   |
| 3.4 Karışım Ortamı İçin Love Şekil Değiştirme Fonksiyonu .....                                                     | 24   |
| 4. KARIŞIM ORTAMI İÇİN SİNÜZOİDAL YAYILI YÜK PROBLEMİ.....                                                         | 27   |
| 4.1 Bileşenleri Birbirine Göre Bağlı Hareket Edebilen Karışım İçin Çözüm .....                                     | 27   |
| 4.2 $Al_2O_3$ - NiAl Kompozitine Ait Deneysel Veriler ve Bileşenleri Bağlı Hareket<br>Etmeyen Karışım Ortamı ..... | 31   |
| 5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER.....                                                                                  | 35   |
| 5.1 Sinüzoidal Yayılı Yük Problemi .....                                                                           | 36   |
| 5.2 $Al_2O_3$ - NiAl Kompozitinin Verileri ve Sinüzoidal Yayılı Yük Problemi .....                                 | 37   |
| 5.3 Hesaplamaların Kontrolü Amaçlı Alternatif Yaklaşımlar .....                                                    | 43   |
| KAYNAKLAR.....                                                                                                     | 45   |
| ÖZGEÇMİŞ.....                                                                                                      | 47   |



## SEMBOLLER

|                                      |                                                              |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $x_i, y_i$                           | : Parçacıkların $t$ zamanındaki konumu                       |
| $X_i, Y_i$                           | : Şekil değiştirme başlamadan önceki referans konum          |
| $u, w$                               | : Yer değiştirme vektörü                                     |
| $\varepsilon_{ij}, e_{ik}, g_{ik}$   | : Şekil değiştirme tansörü                                   |
| $t_{ij}, \sigma_{ik}, \pi_{ik}$      | : Gerilme tansörü                                            |
| $f_i, F_k, G_k$                      | : Birim hacim başına düşen ağırlık kuvveti                   |
| $p_k$                                | : Difüzyon kuvveti                                           |
| $\alpha_2$                           | : Başlangıç konumundaki ön gerilme                           |
| $\tau$                               | : Kayma gerilmesi                                            |
| $p$                                  | : Karışım ortamına etki eden hidrostatik basınç              |
| $\rho, \rho_1, \rho_2$               | : Yoğunluk                                                   |
| $t$                                  | : Zaman                                                      |
| $\beta$                              | : Karışımındaki elastik katı bileşen sayısı                  |
| $S, S_1, S_2$                        | : Yüzey oranları                                             |
| $V, V_1, V_2$                        | : Hacim oranları                                             |
| $E, E_1, E_2$                        | : Elastiklik modülü                                          |
| $\nu$                                | : Poisson oranı                                              |
| $\lambda, \mu$                       | : Lamé katsayıları                                           |
| $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ | : Karışım bileşenlerine ait Lamé katsayıları                 |
| $\lambda_3, \lambda_4, \mu_3$        | : Karışım bileşenleri arasındaki etkileşim bünye katsayıları |
| $\delta$                             | : Kronecker delta                                            |
| $I$                                  | : Birim tansör                                               |
| $i, j, k$                            | : Alt indisler                                               |
| $mm$                                 | : Tekrarlanan indisler                                       |
| $e_i, e_j$                           | : Birim vektörler                                            |
| $T$                                  | : Transpoze işlemi                                           |
| $\nabla$                             | : Nabla operatörü                                            |
| $\nabla^2$                           | : Laplasyen operatörü                                        |
| $\nabla^4$                           | : Biharmonik operatör                                        |
| $G, F$                               | : Galerkin vektörü                                           |

**$Z(x, y, z)$**  : Love şekil değiştirme fonksiyonu  
 **$P(x, y, z)$**  : Sınır yükleri  
 **$l, L, R$**  : Keyfi sabitler



## ÇİZELGE LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                                   |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Çizelge 4.1 :</b> $\text{Al}_2\text{O}_3$ ve NiAl malzemelerine ait özellikler. ....                                           | 32 |
| <b>Çizelge 4.2 :</b> $\text{Al}_2\text{O}_3$ –NiAl kompozitinde NiAl’in farklı hacim oranları için deneysel sonuçlar. ....        | 32 |
| <b>Çizelge 4.3 :</b> Farklı $\alpha$ hacim oranları için hesaplanmış $\lambda_3$ , $\lambda_4$ ve $\mu_3$ (GPa) katsayıları. .... | 33 |





## ŞEKİL LİSTESİ

### Sayfa

|                                                                                                                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Şekil 2.1 :</b> Tekil ortamda şekil değiştirme. ....                                                                                                                   | 3  |
| <b>Şekil 2.2 :</b> Sınır yüzeyine dikey olarak etki eden sinüzoidal yayılı yük. ....                                                                                      | 12 |
| <b>Şekil 5.1 :</b> Yer değiştirmelerin düşey bileşenlerine ait değişimler. ....                                                                                           | 38 |
| <b>Şekil 5.2 :</b> $p_z$ 'nin $x$ doğrultusundaki değişimi. ....                                                                                                          | 39 |
| <b>Şekil 5.3 :</b> Karışıma ait toplam gerilmenin normal bileşeni. ....                                                                                                   | 40 |
| <b>Şekil 5.4 :</b> Tüm karışıma ve karışım bileşenlerine ait gerilme değerlerinin $x=0$ ,<br>$y=0$ konumu için $z$ doğrultusundaki değişimleri. ....                      | 40 |
| <b>Şekil 5.5 :</b> Tüm karışıma ve karışım bileşenlerine ait yer değiştirme değerlerinin<br>$y=0$ konumu ve $l=L=1$ değerleri için $z$ doğrultusundaki değişimleri. ....  | 41 |
| <b>Şekil 5.6 :</b> $p_x$ 'nin $z$ doğrultusundaki değişimi ( $y=0$ ve $l=L=1$ ). ....                                                                                     | 42 |
| <b>Şekil 5.7 :</b> Tüm karışıma ve karışım bileşenlerine ait kayma gerilmesi değerlerinin<br>$y=0$ konumu ve $l=L=1$ değerleri için $z$ doğrultusundaki değişimleri. .... | 42 |



# **İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN BİR SÜREKLİ ORTAMDA YARI SONSUZ BİR YÜZEYE ETKİ EDEN SİNÜZOİDAL YAYILI YÜK İÇİN ANALİTİK BİR ÇÖZÜM**

## **ÖZET**

Karışım, iki veya daha fazla sürekli ortamın difüzyona uğrayarak oluşturduğu ve kendine ait karakteristikleri, mekanik ve ısıl davranışları olan homojen bir sürekli ortamdır. Böyle bir ortamın özelliklerinin bilimsel bir disiplin çerçevesince incelenebilmesi ve bunun mühendislik uygulamalarına aktarılabilmesi amacıyla karışımlar teorisi yaklaşımı geliştirilmiştir. Sürekli ortamlar mekaniğini baz alan bu teori sayesinde, çok bileşenli ortamlar için ihtiyaç duyulan teorik altyapı hazırlanmış ve jeolojik katman, biyolojik doku, tanecikli kompozit malzeme gibi yapıların davranışlarının matematiksel analizi için alternatif bir metod ortaya konmuştur.

Bu çalışmada, iki elastik katıdan oluşan homojen bir sürekli ortam için karışımlar teorisinin öngördüğü lineer bünye denklemleri verilerek gerilme, şekil değiştirme, difüzyon kuvveti gibi alan büyüklükleri Love şekil değiştirme fonksiyonları yardımı ile ifade edilmiştir. Üç farklı mekanik deneyin matematiksel yapılarından faydalanılarak, bileşenleri birbirine göre bağıl hareket etmeyen karışım ortamı koşulu altında, bünye denklemlerindeki bilinmeyen katsayıları tespit etmemize imkan sağlayacak bağıntılara ulaşılmıştır. Ardından, elde edilen sonuçların uygulanması ve değerlendirilmesi amacıyla, yarı-sonsuz bir karışım ortamı için sinüzoidal yayılı yük problemi çözülmüş ve  $Al_2O_3$ -NiAl kompozitine ait veriler kullanılmıştır.

Çalışmanın ilk etabında, amaç ve literatür bilgisinin ardından, elastik katı karışımlarının anlaşılmasına yardımcı olmak amacıyla tekil elastik ortama ait temel ifadeler yer verilmiştir. Bu çerçevede tekil ortama ait yer değiştirme probleminin çözülebilmesi için gerekli olan Navier denkleminin Galerkin vektörü ve onun özel bir hali olan Love şekil değiştirme fonksiyonu yardımıyla dönüştüğü yeni form hesaplanmıştır. Elde edilen bu form ile tekil ortam için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilmiş ve sinüzoidal yayılı yük problemi ve ilgili sınır koşulları tartışılmıştır.

Daha sonra, iki elastik katıdan oluşan karışım ortamı bileşenlerine ait birim şekil değiştirme tansörleri, gerilme tansörleri, difüzyon kuvveti vektörü ve yer değiştirme vektörleri incelenmiş, karışıma ait bilinmeyen bünye katsayılarına dikkat çekilmiştir. Bilinmeyen bünye katsayıları konumundaki etkileşim terimlerini bilinen bünye katsayıları olan Lamé elastik sabitleri cinsinden hesaplayabilmek amacıyla üç farklı mekanik zorlanma durumu ele alınmıştır. Bu kapsamda, karışım ortamına ait bir numunenin kullanıldığı basit çekme, basit kayma ve hidrostatik basınç deneylerine ait matematiksel hesaplamalara yer verilmiştir. Bu işlemler sonucunda, karışım ortamına ait bilinmeyen bünye katsayılarını yöneten denklemlere ulaşılmıştır. Elde edilen bu bilgilere ek olarak karışım bileşenlerinin bağıl hareket etmedikleri, yani her bir bileşene ait parçacığın bir diğer bileşene ait parçacık ile aynı anda, aynı miktarda ve aynı yönde hareket ettiği durum için karışım ortamına ait bünye katsayıları ile bu ortama eşdeğer mekanik davranış sergileyen tekil bir ortamın bünye katsayıları

arasında bağlantı kurulmuştur. Bulunan bu ilişkilerin test edilmesi amacıyla da karışım ortamı için sinüzoidal yayılı yük problemi ele alınmıştır.

Hesaplamalarda, karışıma ait yer değiştirme vektörleri arasındaki ilişkiyi veren ifadelerin iki Navier denkleminin toplamına benzemesi sebebiyle, yer değiştirme vektörleri iki farklı Galerkin vektörü cinsinden ifade edilmiştir. Eksenel simetrik gerilme uygulamaları için Galerkin vektörlerinin, bu vektörlerin özel bir durumu olan, Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden ifade edilebildiği bilgisi kullanılarak, kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumlar için, Navier denklemleri Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden biharmonik fonksiyonlar olarak yazılmıştır. Ayrıca, karışıma ait yer değiştirme, difüzyon kuvveti ve gerilme bileşenleri de Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden ifade edilmiştir. Yarısonsuz bir karışım ortamı yüzeyine dikey olarak etkiyen yüklemeler için hangi sınır koşullarının geçerli olduğu belirtildikten sonra, karışım bileşenlerinin bu yüklemelere hangi oranlarda maruz kalacakları tespit edilmiştir.

Sinüzoidal yayılı yük probleminin çözümünde karışım bileşenlerinin birbirinden farklı yer değiştirmeler yapabildiği genel durum esas alınmıştır. Böylece, bağıl hareketsiz durum bağıl hareketli durumun özel bir hali olduğu için, izafi yer değiştirmenin olmadığı duruma ait olan bünye katsayısı denklemlerinin test edilmesi amaçlanmıştır. Elde edilen bağıntılarda kullanılmak üzere sayısal bir örnek olarak  $Al_2O_3$ -NiAl kompozitine ait verilerden istifade edilmiştir. Bu veriler ve bu verilere bağlı olarak bulunan bünye katsayısı değerleri, problem çözümünde bulunan yer değiştirme, gerilme ve difüzyon kuvveti ifadelerine tatbik edilerek ortam davranışına ait grafikler elde edilmiştir.

Çalışmanın sonunda, sinüzoidal yayılı yük problemi hesaplamalarının alternatif bir kontrolü için, ikili karışım ortamına ait denge denklemlerinin farkından oluşan ve difüzyon kuvvetini veren farklı bir ifade türetilmiştir.

# **ANALYTICAL SOLUTION FOR A SINUSOIDAL DISTRIBUTED LOAD ACTING ON A SEMI INFINITE SURFACE IN A CONTINUUM OF TWO ELASTIC SOLIDS**

## **SUMMARY**

Mixture is defined as a homogenous continuum which is a result of diffusion of two or more different continua. The mixture continuum has its own material characteristics, mechanical and thermal behaviours differing from the mixture components. In order to examine the properties of this new material in scientific methods and to use in engineering applications, the approach of mixture theory is developed. Based on the continuum mechanics, the mixture theory comes through an alternative method for the mathematical analysis of the structural behaviours of geological layers, biological tissues and granular composite materials by preparing the theoretical background needed for the multi-component materials.

In this study, stress, strain and diffusion force fields are defined in terms of Love's strain function by using the linear constitutive equations provided by the mixture theory for the homogenous continuum consisting of two elastic solids. In this case, by using the mathematical structures of three different mechanical experiments, relations for the unknown coefficients in the constitutive equations of no relative component motion mixture continuum have been developed. Afterward, in order to apply and examine the results of this approach, a sinusoidal vertical load problem for the semi-infinite mixture continuum has been solved and also, data of an  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  composite has been used.

In the first chapter, purpose and the literature research for this study is given. In this case, historical development, difficulties faced in the use and the base need of existence of the mixture theory are also mentioned.

In the second chapter, basic statements for the single elastic continuum are expressed in order to help to understand the mixture of elastic solids. In this case, the new form of Navier's equation, needed to solve the displacement problem belongs to single continuum, is calculated using the Galerkin vector and its special case Love's strain function. By using this calculated new form, displacement and stress statements for the single continuum are obtained. And afterward, sinusoidal vertical load problem and related boundary conditions are discussed.

In the third chapter, stress and strain tensors, diffusion force and displacement vectors belonging to constituents of the mixture of two elastic solids are examined. And also, the unknown coefficients of the constitutive equations are mentioned. In order to calculate these interaction terms, which are the unknown constitutive coefficients, in terms of Lamé elastic constants the common constitutive coefficients, three different mechanic stress cases are dealt. In this case, mathematical calculations belong to a sample of mixture continuum, which is subjected to normal stress, shear stress and hydrostatic pressure experiments, are used. As a result of this process, the equations giving the unknown constitutive coefficients of the mixture

continuum are obtained. Additionally to these gained results, a connection has been established between the constitutive coefficients of the no relative component motion mixture continuum, means that each tiny piece of the constituents of the mixture moves at the same time same direction and the same magnitude, and the constitutive coefficients of a single continuum having an equivalent mechanical property to this mixture. In the purpose of testing these results, the sinusoidal vertical load problem for the semi-infinite mixture continuum has been solved in the fourth chapter.

In calculations, because of the similarity found to the sum of two Navier's equations, relations between the displacement vectors of the mixture constituents are expressed in terms of two different Galerkin vectors. For the axial-symmetry problems, the Galerkin vectors can be defined in terms of Love's strain functions. Therefore, for the case of mass forces are neglected, the Navier's equations are expressed as biharmonic functions in terms of Love's strain functions. Additionally, the displacement, the diffusion force and the stress components of the mixture are also defined in terms of Love's strain functions. After specifying the valid boundary conditions for the sinusoidal vertical loads for the semi-infinite mixture continuum, in which ratios the mixture constituents will handle these loads is determined.

In the fourth chapter, the solution of the sinusoidal vertical load problem for the semi-infinite mixture continuum is calculated in the general case of permitting the relative motion between the mixture components. By this way, because of being a relatively inert motion is one of a special case of relative motion, it is aimed to test the constitutive coefficients found in no relative motion. Also in the use of these equations, datas of a  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  composite are used as a numerical example. By applying these datas and the numerical values of the constitutive coefficients, obtained from the  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  composite, to the displacement vectors, stress tensors and the diffusion forces found in the problem solution, the graphics showing the mixture behaviour are obtained.

In the examination of the results, firstly when the constitutive coefficients obtained from the constitutive equations of no relative motion case are applied to sinusoidal vertical load problem solved in the general case of permitting the relative motion, it is observed that the displacement of the mixture components are found equal to each other. This makes a proof for being the relatively inert motion is one of a special case of relative motion.

In the same way, in the graphic belongs to displacement vectors in the direction of vertical load for the equivalent single continuum and for the mixture constituents, it is observed that the difference between displacements of mixture constituents is found negligibly small. So, this observation makes a second proof for the relative, no relative motion cases.

And also it is discussed that there may two causes of observing a small difference between the mixture constituents displacements in the graph. One of them is calculating the mixture constituents in which ratios will handle the applied loads should not be depend just only to volume fraction of each constituent, but in this work only volume fraction determined these ratios. On the other reason is the values used from the  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  composite are experimental results.

Secondly, the graphics for the diffusion force between the mixture constituents and for the stress tensors belongs to mixture constituents and to equivalent single continuum are examined. In this case, the common observed situation between the

displacement vectors graphic and the diffusion force graphic, when the  $z \rightarrow \infty$  case both the displacement vectors and the diffusion force are converged to zero. These results were expected due to the boundary conditions of the sinusoidal vertical load problem valid for the Love's strain function approach.

The results according to stress tensors graphic for the mixture continuum, for the mixture constituents and for the equivalent single continuum, give equal values between the stress tensor of mixture continuum and the stress tensor of the equivalent single continuum.

And a second result is the stress tensors of mixture constituents differ from the stress tensor of mixture continuum due to the interaction of these constituents between each other.

And a third result, the observation made for the  $z \rightarrow \infty$  case for the stress tensors of the mixture continuum, mixture constituents and the equivalent single continuum gave the same result with the displacement vectors and the diffusion force as converging to zero.

Lastly at the end of the study, as an alternative control to the calculations of the sinusoidal vertical load problem, a new statement for the diffusion forces is derived by subtracting the equations of equilibrium of a binary mixture continuum. This statement and the equations obtained in the sinusoidal vertical load problem for the diffusion forces have a similar form while their coefficients seems totally different. However, when the relations taken from the both approaches are merged with the values taken from the  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  composite, the obtained diffusion force values for the both ways are seemed negligibly equal to each other. Therefore, this examination gave an extra opportunity to control the calculations of the study.



## 1. GİRİŞ

### 1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışmasının hedefleri, iki elastik katıdan oluşan bir karışım ortamına ait bünve denklemlerindeki bilinmeyen katsayıların, bileşenleri birbirine göre bağıl hareket etmeyen karışım bileşenleri koşulu altında, tespitine yarayan bağıntılar elde etmek, bulunan sonuçların uygulanması amacıyla yarı-sonsuz bir karışım ortamı için sinüzoidal yayılı yük problemini çözmek ve  $Al_2O_3$  - NiAl kompozitine ait veriler yardımıyla elde edilen sonuçları görselleştirmek.

Bu kapsamda öncelikli olarak iki elastik katıdan oluşan bir sürekli ortamın karışım kinematiği ele alınacak, çalışmada kullanılacak teörinin verdiği bünve denklemleri tanıtılacak, sonrasında sinüzoidal yayılı yük probleminde kullanmak üzere denklemler için belirlenen bünve ve denge denklemleri tekil ve karışım ortamlarında Love şekil değıştirme fonksiyonları cinsinden ifade edilecek, daha sonrasında ise sınır koşullarının bu fonksiyonlara tatbik edilmesi neticesinde probleme ait çözümler elde edilecektir. Bulunan sonuçlar  $Al_2O_3$  - NiAl kompozitinden elde edilen veriler kullanılarak değeriendirilecektir.

### 1.2 Literatür Araştırması

Günümüzde, endüstriyel ilerlemenin ihtiyaçlarını karşılayabilecek niteliklere sahip bir malzemenin elde edilmesi isteğı ve arzusu, bu çerçevede ele alınabilecek malzemelerin fiziksel ve kimyasal özelliklerinin geliştirilmesi yönündeki çabaları arttırmaktadır. Bu durum çeşitli uygulama sahalarında kompozit malzemelerin kullanım olanaklarının araştırılmasını da gittikçe önemli kılmaktadır. Bu araştırmalar özellikle tekil bir malzemenin istenen ihtiyaçları tam olarak karşılayamadığı ortamlar için kritik rol oynamaktadır. Bu çerçevede, tekil olmayan bir malzemenin termomekanik özelliklerinin analiz edilebilmesi için bu özellikleri kapsayan sistem denklemlerini elde etmek amacıyla çeşitli çalışmalar yürütülmüştür. Sonuç olarak günümüzün sürekli ortamlar mekaniğı prensipleri ve metodolojisi temel alındığında,

karişımların teorisi bu çalışmalar için uygun bir yaklaşım olarak geliştirilmiştir. Bu konudaki çalışmalar incelendiğinde; karişımların teorisine ait günümüz termomekanik sürekli ortam formüllerinin kökenleri Truesdell ve Toupin (1960) ile Green ve Naghdi (1965)'nin çalışmalarına kadar uzanmaktadır. Bu konudaki daha kapsamlı araştırmalar ise Bowen (1976), Atkin ve Craine (1976), Bedford ve Drumheller (1983) ile Rajagopal ve Tao (1995)'nun çalışmalarında bulunmaktadır. Özellikle de iki ya da daha fazla katıdan oluşan karişımların bünye teorisi Green ve Steel (1966), Bowen ve Wiese (1969) ile günümüzde Rushchitsky (1996, 2008), Ieşan (1994, 1997, 2011), Ciarletta (1998), Burchuladze ve Svanadze (2000), Passarella ve Zampoli (2006), Leseduarte ve Quintanilla (2008), Simchuk ve Priz (2010), Muti ve Dokuz (2015)'un da aralarında bulunduğu birçok yazar tarafından dikkate alınmıştır.

Etkileşim içerisindeki sürekli ortama ait genel termodinamik teorisinin Green ve Naghdi (1965) tarafından geliştirilmiş bulunan formda kullanılması sonucunda; Green ve Steel (1966)'in çalışmalarında iki non-lineer elastik katıdan oluşan bir karişım için temel bünye denklemleri elde edilmiştir. Bu genel denklemlere ilave olarak Steel (1967a, 1967b) tarafından; iki elastik katıdan oluşan izotropik bir karişım ortamı için lineer teori geliştirilmiştir. Bir başka çalışmasında ise Steel (1968a, 1968b), karişım teorisinin geliştirilmesindeki temel esasın; makroskopik oranlar baz alındığında karişıma ait her bir parçacığın içerisinde o karişımı oluşturan katılara ait parçacıkların da bulunması koşuluyla belirli türlerdeki kompozit malzeme ya da ikili alaşımların davranışlarını tanımlama girişimi olduğunu belirtmiştir.

Literatür araştırması bize göstermektedir ki etkileşim ortamına ait karişım teorisinin pratik problemler üzerindeki denenmiş uygulamaları oldukça az sayıdadır. Bunun sebepleri incelendiği takdirde sınır şartlarının belirlenmesinde yaşanan zorluklar ve karişımı oluşturan bileşenler arasında öngörülen etkileşimin modellenmesindeki glklr ile karşılaşılmıştır (Rajagopal ve Tao, 1995). Karişım teorisi alanında Gürgöze ve Dokuz (1999, 2002)'un tekil bir noktaya etki eden bir kuvveti inceleyen alışmaları, Kelvin ve Boussinesq problemine zm olarak ilk niteliği taşımaktadır. Başka bir çalışmada ise Dokuz (2005), Boussinesq probleminin üzümünden yararlanarak lineer elastik katı karişımının içerisindeki her bir bileşene ait fiziksel miktarı analitik olarak hesaplama girişiminde bulunmuştur.

## 2.1 Tekil Elastik Ortam İçin Lineer Bünye Denklemleri

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$
$$\mathbf{x}_i = \mathbf{X}_i + \mathbf{u}_i \quad (2.2)$$

3

Tekil malzemenin maruz kalacağı şekil değiştirme tansörü  $\varepsilon_{ij}$ 'nin, lineer elastik katılar için

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) \quad (2.3)$$

şeklinde olacağı bilinmektedir. Burada yer alan  $i$  ve  $j$  alt indisler olup, matris formatında yazıldığında, tansör ya da vektörlerde hangi satır ve sütundaki elemanın hesaba katılması gerektiğini belirtmektedir. Aynı denklem,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

olarak da ifade edilebilir. Buradaki indisler arasında yer alan virgül işareti konuma göre türev işlemini temsil etmektedir.

Lineer ve izotropik bir malzeme için  $\sigma_{ij}$  gerilme ve  $\varepsilon_{ij}$  şekil değiştirme tansörleri arasındaki ilişkiyi veren bünye denklemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} \quad (2.5)$$

Bu bünye denklemi ifadesinde yer alan terimlerden  $\delta_{ij}$ , kronecker deltasıdır ve matris formatında birim matrise karşılık gelir.

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

(2.5) Bünye denkleminde bahsi geçen  $\lambda$  ve  $\mu$  katsayıları ise Lamé katsayıları olarak adlandırılır ve E elastiklik modülü ve  $\nu$  Poisson oranı ile ilişkileri

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.7)$$

şeklinde ifade edilir.

Yine (2.5) bünye denklemi ifadesinde yer alan  $\varepsilon_{mm}$  alt indisleri, tekrarlanan indisler olup Einstein toplama kuralına göre aşağıdaki (2.8) bağıntısını temsil eder.

$$\varepsilon_{mm} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \quad (2.8)$$

(2.4) şekil değiştirme tansörü (2.5) bünye denkleminde yerine konulduğu takdirde,  $\sigma_{ij}$  gerilme ifadesi ile  $u_i$  yer değiştirme vektörü arasındaki

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{m,m} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.9)$$

ilişkisine ulaşılır. Yer değiştirme vektörü ve gerilme bileşeni arasındaki bulunan bu bağıntı aşağıdaki tansörel formda da ifade edilebilir.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu [\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^T] \quad (2.10)$$

Burada  $\boldsymbol{\sigma}$  ve  $\mathbf{I}$  terimlerinin açık formları  $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  ve  $\mathbf{I} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  şeklindedir. Buradaki  $\mathbf{e}_i$  ve  $\mathbf{e}_j$  birim vektörleri temsil etmektedir. İkinci mertebeye tansörlerde geçerli olan  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  gösterimine diyard adı verilir.  $\boldsymbol{\nabla}$  simgesi Nabla Operatörü olarak adlandırılır ve  $\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  şeklinde tanımlanır.

$\boldsymbol{\nabla}$  Nabla Operatörü kullanılarak tansörel notasyonda Gradyan ya da Diverjans işlemleri aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \mathbf{e}_j = u_{j,i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \left( \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (u_j \mathbf{e}_j) = u_{j,i} \delta_{ij} = u_{i,i} \quad (2.11)$$

Son olarak, (2.10) denkleminde yer alan T ifadesi ise Transpoze işlemini ifade eder ve etkileşime girdiği bileşenin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesi neticesini verir. Transpoze işlemini indis notasyonu kullanarak ve (2.10) ve (2.9) işlemleri arasında bir bağlantı oluşturacak şekilde ifade edersek,  $u_i$  yer değiştirme bileşenleri için  $(\boldsymbol{\nabla} \mathbf{u})^T = (u_{j,i})^T \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = u_{i,j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  şeklinde bir sonuç elde edilir.

Sürekli bir ortam için kabul edilebilir bir gerilme alanının aşağıda verilen denge denklemini de sağlaması gerekir

$$\sigma_{ji,j} + f_i = 0 \quad (2.12)$$

Bu ifadede yer alan  $f_i$  terimi kütle kuvveti olarak adlandırılır ve birim hacim başına düşen ağırlık kuvvetini temsil eder.

Gerilme – yer değiştirme ilişkisini veren (2.9) denklemi, (2.12) denge denkleminde yerine konulursa, yer değiştirme ve kütle kuvvetini ihtiva eden

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + f_i = 0 \quad (2.13)$$

Navier denklemi elde edilir. Aynı denklem tansörel formda,

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{f} = 0 \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki  $\nabla^2$  sembolü Laplasyen operatörü olup,  $\nabla^2 \mathbf{u}$  terimi

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \left( \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \mathbf{e}_k \right) = u_{k,ij} \delta_{ij} \mathbf{e}_k = u_{i,jj} \mathbf{e}_i \quad (2.15)$$

ve  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$  terimi ise

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j} u_k \mathbf{e}_k \right) = \mathbf{e}_i (u_{k,j} \delta_{jk})_{,i} = u_{j,ji} \mathbf{e}_i \quad (2.16)$$

vektörünü temsil etmektedir.

## 2.2 Tekil Ortam İçin Galerkin Vektörü Çözümü

Yer değiştirme vektörü  $\mathbf{u}$  ile kütle kuvveti vektörü  $\mathbf{f}$  büyüklüklerini içeren Navier denklemi Galerkin vektörü olarak adlandırılan bir tanım yardımıyla biharmonik bir denkleme dönüşmektedir. Biharmonik denklemler lineer elastisite teorisinde sıklıkla karşılaşılan dördüncü mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerdir. Biharmonik bir denklem,  $\nabla^4$  biharmonik operatör olarak adlandırılmak üzere,

$$\nabla^4 f = 0 \quad \text{veya} \quad \nabla^2 \nabla^2 f = 0 \quad (2.17)$$

şeklinde gösterilir ve operatörün açık hali aşağıdaki gibi verilir:

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \quad (2.18)$$

(2.17) biharmonik denkleminin çözümünü veren herhangi bir  $f$  fonksiyonu biharmonik fonksiyon olarak isimlendirilir.

(2.14) ile verilen Navier denkleminde kullanılmak üzere Galerkin vektörünün  $(\mathbf{G}) \mathbf{u}$  yer değiştirme bileşeni ile ilişkisi ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Fung, 1968):

$$2\mu \mathbf{u} = 2(1 - \nu)\nabla^2 \mathbf{G} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}) \quad (2.19)$$

Elde edilen bu ifadeyi sadeleştirmek amacıyla

$$\frac{1}{2\mu} \mathbf{G} = \mathbf{F} \quad A = 2(1 - \nu) = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad (2.20)$$

kabulleri yapılırsa (2.19) ifadesi aşağıdaki gibi daha basit ve sade bir hale getirilir.

$$\mathbf{u} = A\nabla^2 \mathbf{F} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (2.21)$$

Elde edilen bu sonuç (2.14) Navier denkleminde yerine yazıldığı takdirde,

$$\mu A\nabla^4 \mathbf{F} + [A(\lambda + \mu) - (\lambda + 2\mu)] \nabla (\nabla \cdot \nabla^2 \mathbf{F}) + \mathbf{f} = 0 \quad (2.22)$$

ve köşeli parantez içerisindeki kısım (2.20)'daki tanım nedeniyle sıfır olacağı için,

$$\nabla^4 \mathbf{F} = -\frac{1}{\mu A} \mathbf{f} \quad (2.23)$$

bağıntısına ulaşılır.

$\mathbf{G}$  Galerkin vektörü ile  $\mathbf{F}$  vektörü arasındaki dönüşümü belirten (2.20)'daki tanım burada yerine konulursa,

$$\nabla^4 \mathbf{G} = -\frac{2}{A} \mathbf{f} \quad (2.24)$$

elde edilir.

Ortama etki eden yüklemenin yanında  $\mathbf{f}$  kütle kuvvetinin etkisi sıklıkla ihmal edilir.

$\mathbf{f} = 0$  olduğunu kabul edersek ortamın  $\mathbf{u}$  yer değiştirmesine ait problem,

$$\nabla^4 \mathbf{F} = \nabla^4 \mathbf{G} = 0 \quad (2.25)$$

şeklinde biharmonik bir denklemin çözümüne indirgenmiş olur.

Bu noktadan sonra, çözümü ve sonucu değiştirmeyeceği görüldüğüne göre,  $\mathbf{G}$  yerine  $\mathbf{F}$  vektörü Galerkin vektörü olarak isimlendirilmeye devam edilecektir.

### 2.3 Tekil Ortam İçin Love Şekil Değiştirme Fonksiyonu

**F** Galerkin vektörü genel durumda üç bileşenli tansörel bir büyüklüktür. Bu bileşenlerden ikisinin sıfır olduğu özel durum, eksenel simetrik problemlerin çözümü için elverişli bir ortam sağlamaktadır. Eksenel simetrik problemlerin çözümlerine hazırlık amacıyla, Galerkin vektörünün bileşenlerinden ikisinin sıfır olduğu durum incelenecektir.

Bu çerçevede **F** Galerkin vektörünün bileşenlerini

$$\mathbf{F} = \{0, \quad 0, \quad Z(x, y, z)\} \quad (2.26)$$

şeklinde gösterelim. Burada sıfırdan farklı olan  $Z(x, y, z)$  fonksiyonu, Love şekil değiştirme fonksiyonu olarak isimlendirilir ve **F** Galerkin vektörü ile olan ilişkisini veren (2.26) ifadesi vektörel formda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{F} = Z(x, y, z) \mathbf{e}_3 \quad (2.27)$$

Bu durumda **F** Galerkin vektörünün biharmonikliğini belirten (2.25) denklemi de  $Z(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonu cinsinden

$$\nabla^4 (Z \mathbf{e}_3) = 0 \quad \nabla^4 Z(x, y, z) = 0 \quad (2.28)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Biharmonik denklemi çözmekte kullanılan bir yöntem, (2.28) denkleminde yer alan  $Z(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonu için  $x$ ,  $y$  ve  $z$  değişkenlerine bağlı olan uygun bir biharmonik fonksiyon önermek ve fonksiyonda yer alan bilinmeyen katsayıları sınır koşulları yardımıyla tespit etmektir, (Fung, 1968). Bu yaklaşım biçimi ters yöntem olarak da isimlendirilmektedir.

$Z(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonu için önerilen biharmonik fonksiyon aşağıdaki gibidir.

$$Z(x, y, z) = (\bar{c}z + \bar{d}) \Psi(x, y, z) \quad (2.29)$$

Bu ifadede  $\bar{c}$  ve  $\bar{d}$  bilinmeyen sabit katsayıları temsil etmekte,  $\Psi(x, y, z)$  ise ilgi alanımızda olan sinüzoidal yayılı yük problemine uygun olarak

$$\Psi(x, y, z) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) f(z) \quad (2.30)$$

şeklindeki bir fonksiyon olarak kabul edilmektedir. Buradaki  $l$  ve  $L$  büyüklükleri keyfi sabitlerdir. Harmonik bir fonksiyonun  $(\bar{c}z + \bar{d})$  gibi bir fonksiyonla çarpılması biharmonik bir fonksiyon verir. Dolayısıyla,  $\Psi(x, y, z)$  fonksiyonunun harmonik olması  $Z(x, y, z)$ 'nin biharmonik olması için yeterlidir. Bu durumda  $f(z)$ 'nin değerini bulmak amacıyla  $\nabla^2 \Psi = 0$  işlemi yapıldığında

$$\nabla^2 \Psi = \left( \left[ -\frac{\pi^2}{l^2} - \frac{\pi^2}{L^2} \right] f(z) + f''(z) \right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) = 0 \quad (2.31)$$

denklemini elde edilir. Buradaki  $\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)$  terimi sıfırdan farklı kabul edildiğine göre, parantez içerisindeki terim sıfıra eşit olmalıdır.

$$f''(z) - \gamma^2 f(z) = 0, \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \quad (2.32)$$

Bu basit denklemin çözümü  $C_1$  ve  $C_2$  sabit katsayılar olmak üzere,  $f(z) = C_1 e^{\gamma z} + C_2 e^{-\gamma z}$  şeklinde elde edilir.  $z$  parametresi sonsuza gittiğinde çözümlerimizin sonlu kalabilmesi adına  $C_1 = 0$  alınır ve

$$c = \bar{c} C_2, \quad d = \bar{d} C_2 \quad (2.33)$$

tanımları yapılırsa, Love şekil değiştirme fonksiyonumuzun

$$Z(x, y, z) = (cz + d) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.34)$$

şeklinde ifade edilmesi gerektiği sonucuna ulaşılır. Burada  $c$  ve  $d$ , problemin sınır koşulları yardımıyla tespit edilmesi gereken iki sabit katsayıdır.

$\mathbf{F} = F_i \mathbf{e}_i$  Galerkin vektörü (2.21) ile verilen  $\mathbf{u}$  yer değiştirme alanında yerine konulursa

$$u_i \mathbf{e}_i = A \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_j} F_i \mathbf{e}_i - \frac{\partial}{\partial z_i} \mathbf{e}_i \left( \frac{\partial}{\partial z_j} \mathbf{e}_j \cdot F_k \mathbf{e}_k \right), \quad (2.35)$$

ve dolayısıyla

$$u_i = AF_{i,jj} - F_{j,ji} , \quad (2.36)$$

elde edilir.  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = 0$  ve  $F_3 = Z$  olduğuna göre, (2.36) yardımıyla,  $\mathbf{u}$  yer değiştirme alanını oluşturan  $u_x$ ,  $u_y$  ve  $u_z$  bileşenleri ile  $Z(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonu arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_1 = -\frac{\partial^2 Z}{\partial z_1 \partial z_3} = -\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial z} = u_x \quad (2.37)$$

$$u_2 = -\frac{\partial^2 Z}{\partial z_2 \partial z_3} = -\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial z} = u_y \quad (2.38)$$

$$u_3 = A \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + (A - 1) \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = u_z \quad (2.39)$$

(2.37)-(2.39)'da ifade edilen  $u_x$ ,  $u_y$  ve  $u_z$  yer değiştirme bileşenleri (2.9) bünye denkleminde yerlerine yerleştirilirse,  $\sigma_{ij}$  gerilme bileşenleri  $Z(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonu cinsinden aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\sigma_{xx} = \lambda (A - 1) \left[ \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} \right] - 2 \mu \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial z} \quad (2.40)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -2 \mu \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y \partial z} \quad (2.41)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \left[ A \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} + A \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial y^2} + (A - 2) \frac{\partial^3 Z}{\partial x \partial z^2} \right] \quad (2.42)$$

$$\sigma_{yy} = \lambda (A - 1) \left[ \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial z} + \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} \right] - 2 \mu \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial z} \quad (2.43)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left[ A \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial y} + A \frac{\partial^3 Z}{\partial y^3} + (A - 2) \frac{\partial^3 Z}{\partial y \partial z^2} \right] \quad (2.44)$$

$$\sigma_{zz} = [\lambda (A - 1) + 2 \mu A] \left( \frac{\partial^3 Z}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 Z}{\partial y^2 \partial z} \right) + [(\lambda + 2 \mu) (A - 1)] \left( \frac{\partial^3 Z}{\partial z^3} \right) \quad (2.45)$$

$Z(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonuna ait (2.34) açılımı (2.37)-(2.39)'daki  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  yer değiştirmelerinde ve (2.40)-(2.45)'deki  $\sigma_{ij}$  gerilme bileşenlerinde yerlerine

konulursa, sınır koşullarına bağlı olarak elde edilecek nihai yer değiştirme ve gerilme değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_x = -\frac{\pi}{l} [\gamma c z + \gamma d - c] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.46)$$

$$u_y = -\frac{\pi}{L} [\gamma c z + \gamma d - c] \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.47)$$

$$u_z = -\gamma([\gamma c z + \gamma d - c] + [2A - 1]c) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.48)$$

ve

$$\sigma_{xx} = -2\mu \left( \frac{\pi^2}{l^2} [\gamma c z + \gamma d - c] + [A - 2] \gamma^2 c \right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.49)$$

$$\sigma_{xy} = 2\mu \frac{\pi^2}{lL} [\gamma c z + \gamma d - c] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = 2\mu \gamma \frac{\pi}{l} ([\gamma c z + \gamma d - c] \\ + [A - 1] c) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\sigma_{yy} = -2\mu \left( \frac{\pi^2}{L^2} [\gamma c z + \gamma d - c] + [A - 2] \gamma^2 c \right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.52)$$

$$\sigma_{yz} = 2\mu \gamma \frac{\pi}{L} ([\gamma c z + \gamma d - c] + [A - 1] c) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.53)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \gamma^2 ([\gamma c z + \gamma d - c] + A c) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.54)$$

Bu noktada elde edilmiş olunan yer değiştirme ve gerilme bileşenleri, sinüzoidal yayılı yük probleminde incelenecektir.

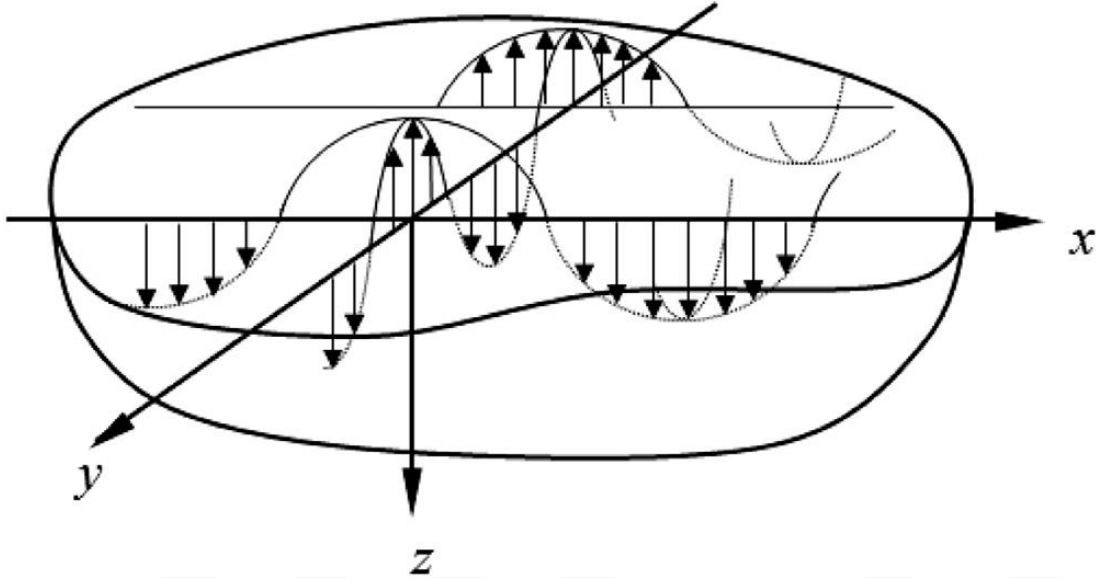
## 2.4 Tekil Elastik Ortam İçin Sinüzoidal Yayılı Yük Problemi

Kullanacağımız sınır koşullarının aynısını karışım ortamına da uygulamayı düşündüğümüz için, sinüzoidal dikey yayılı yük probleminin uygulanabilirliğini

sınamak amacıyla, tekil ortamda elde ettiğimiz (2.46)-(2.48) yer değiştirme bileşenleri ve (2.49)-(2.54) gerilme bileşenlerine bu problemi tatbik edelim.

Bunu uygulamak için gerekli olan sınır koşullarımız aşağıdaki gibidir.

$$\sigma_{xz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{yz}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = R \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (2.55)$$



**Şekil 2.2 :** Sınır yüzeyine dikey olarak etki eden sinüzoidal yayılı yük.

Bu sınır koşullarında, izotropik elastik bir katıya ait tekil bir ortam için  $z \geq 0$  aralığını kapsayan yarı-sonsuz bir uzayın (Şekil 2.2) yüzeyine düşey olarak etki eden sinüzoidal yayılı bir yük uygulanmıştır.

Bu yayılı yük ifadesindeki  $l$ ,  $L$  ve  $R$  terimleri keyfi sabit olarak alınmıştır.

Gerilme bileşenlerine ait (2.55)'de verilen sınır koşulları, tekil ortam için (2.49)-(2.54)'de bulduğumuz gerilme ifadelerine uygulandığı takdirde, bu ifadelerde yer alan ve tanımları (2.33)'te verilen  $c$  ve  $d$  sabit katsayıları aşağıdaki gibi bulunur.

$$c = \frac{R}{2 \mu \gamma^2} \quad d = \frac{[2 - A] R}{2 \mu \gamma^3} \quad (2.56)$$

Bu elde edilen  $c$  ve  $d$  katsayıları ile beraber (2.7), (2.20) ve (2.32)'de  $\mu$ ,  $A$  ve  $\gamma$  için verilen ifadeler birleştirildiği takdirde (2.46)-(2.48) yer değiştirme bileşenleri ve (2.49)-(2.54) gerilme bileşenlerine ait sonuç değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$u_x = -\frac{R [1 + \nu]}{E} \frac{l L^2}{\pi [l^2 + L^2]} [\gamma z - 1 + 2 \nu] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.57)$$

$$u_y = -\frac{R [1 + \nu]}{E} \frac{l^2 L}{\pi [l^2 + L^2]} [\gamma z - 1 + 2 \nu] \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.58)$$

$$u_z = -\frac{R [1 + \nu]}{E} \frac{1}{\gamma} [\gamma z + 2 - 2 \nu] \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.59)$$

ve

$$\sigma_{xx} = -R \frac{1}{[l^2 + L^2]} (L^2 [\gamma z - 1] + l^2 [-2 \nu]) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.60)$$

$$\sigma_{xy} = R \frac{l L}{[l^2 + L^2]} [\gamma z - 1 + 2 \nu] \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.61)$$

$$\sigma_{xz} = R \frac{\pi}{l} z \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.62)$$

$$\sigma_{yy} = -R \frac{1}{[l^2 + L^2]} (l^2 [\gamma z - 1] + L^2 [-2 \nu]) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.63)$$

$$\sigma_{yz} = R \frac{\pi}{L} z \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.64)$$

$$\sigma_{zz} = R [\gamma z + 1] \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) e^{-\gamma z} \quad (2.65)$$

Bu durumda başarılı bir şekilde tekil ortamda denenmiş olunan sinüzoidal yayılı yük problemi aynı şekilde karışım ortamına da tatbik edilebilir.



### 3. İKİ ELASTİK KATIDAN OLUŞAN KARIŞIM ORTAMI

#### 3.1 İki Elastik Katıdan Oluşan Karışım Ortamı İçin Lineer Bünye Denklemleri

Green ve Naghdi (1965)'nin sürekli ortamlar teorisi kullanılarak, lineer olmayan iki elastik katı karışımının bünye denklemleri Green ve Steel (1966) tarafından elde edilmiştir. Daha sonra bu denklemlerin lineerleştirilmesi ve karışımdaki şekli değiştirmelerin küçük olduğu durumlar için uygulanabilir bir forma dönüştürülmesi Steel (1967a) tarafından gerçekleştirilmiştir.

Karışım teorisi genel olarak, karışıma ait bileşenlerin her birinin birbirine göre farklı yer değiştirmeler yaptığı esasına dayanır. Bu kısımda, iki elastik katıdan oluşan karışımın lineer bünye denklemlerinin genel formları ve bu çerçevede alınan temel kabuller sıralanacaktır. İlk olarak, üzerinde çalıştığımız karışımın hiçbir kuvvetin etkisi altında kalmadığında denge durumunda olduğu ve ortamdaki tüm hareketlerin izotermal olduğu kabul edilmektedir. Ayrıca, karışımın izotropik olduğu ve karışımı oluşturan elastik katı bileşenlerin ilk anda  $\bar{\rho}_1$  ve  $\bar{\rho}_2$  sabit yoğunluklarına sahip olduğu da varsayılmaktadır. Karışım bileşenlerine ait parçacıkların  $t$  zamanındaki konumları,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{Y}, t) \quad (3.1)$$

olarak gösterilmiştir.

Buradaki  $\mathbf{X}$  ve  $\mathbf{Y}$  parçacıklara ait referans konumlarıdır ve karışımlar teorisinin temel kabulü olarak, şekil değiştirebilen parçacıklar ilk anda aynı konumu paylaşırlar. Bu durum indis notasyonunda, Lagrange tanımı çerçevesince,  $X_i = Y_i$  olarak da gösterilir.

Bundan sonraki işlemlerimizde ortaya çıkabilecek tüm yer değiştirmelerin ve bunların zamana ve konuma göre türevlerinin çok küçük olacağı kabulü altında hesaplamalarımızda karışım bileşenlerine ait bağıntılarda yalnızca lineer terimleri almamız yeterli olacaktır. Parçacıkların referans konumları ile yer değiştirmeleri arasındaki ilişki,

$$x_i = X_i + u_i^{(1)}, \quad y_i = Y_i + u_i^{(2)} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Karışım ortamını oluşturan bu elastik katıların şekil değiştirme tansörleri ise, lineer teori baz alınarak,

$$e_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_i} \right), \quad g_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial Y_k} + \frac{\partial u_k^{(2)}}{\partial Y_i} \right) \quad (3.3)$$

olarak gösterebilir.

Burada kullanılan  $u_i^{(\beta)}$  terimi,  $\beta$ 'inci elastik katının yer değiştirmesini temsil etmektedir. Karışım da sadece 2 adet karışım bileşeni kullanıldığı için  $\beta$ 'nın da alacağı değerler 1 ve 2 olacaktır. Karışım ortamını oluşturan bileşenlere ait gerilmeleri ve bileşenler arasındaki difüzyon kuvvetini temsil eden bünye denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir (Steel, 1967a):

$$\sigma_{ik} + \alpha_2 \delta_{ik} = \lambda_1 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_1 e_{ik} + \lambda_3 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 g_{ik} - \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) \quad (3.4)$$

$$\pi_{ik} - \alpha_2 \delta_{ik} = \lambda_2 g_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_2 g_{ik} + \lambda_4 e_{mm} \delta_{ik} + 2\mu_3 e_{ik} + \lambda_5 (h_{ik} - h_{ki}) \quad (3.5)$$

$$p_k = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial g_{mm}}{\partial X_k} + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial e_{mm}}{\partial X_k} \quad (3.6)$$

Bu denklemlerde karşılaşılan tekrarlanan indisler, ait oldukları terim için 1'den 3'e kadar toplama işlemini ifade eder. Buradaki katsayıların tamamı ise bileşenlerin yoğunlukları  $\bar{\rho}_1$  ve  $\bar{\rho}_2$ 'ye bağlı sabitlerdir.

$$h_{ik} = \frac{\partial u_k^{(1)}}{\partial X_i} + \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial Y_k}, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}_1 + \bar{\rho}_2, \quad \alpha_2 = \lambda_3 - \lambda_4 \quad (3.7)$$

Bununla birlikte,  $\alpha_2$  katsayısı aynı zamanda başlangıç konumundaki kısmi (ön) gerilmeyi temsil eder.  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  ise (3.4) ve (3.5) denklemlerinde iki karışım bileşeni arasındaki etkileşimle ilişkili katsayılardır. Ortamın sadece karışmış halinin izotropik olduğunu varsaymak yerine, bu karışımı oluşturan her bir katının ayrı ayrı izotropik olduğunu kabul ettiğimiz takdirde  $\lambda_5$  katsayısı  $\lambda_5 = 0$  olarak ele alınabilir.  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_2$  ve  $\mu_2$  katsayıları da 1 ve 2 nolu katılara ait Lamé elastik sabitleridir (Steel,

1967b, 1968a). Her iki katıya ait Lamé elastik sabitleri, (2.7)'deki denklemlere uygun şekilde aşağıdaki gibi tanımlanır.

1 no'lu katıya ait Lamé elastik sabitleri  $\lambda_1$  ve  $\mu_1$ :

$$\lambda_1 = \frac{v_1 E_1}{(1 + v_1)(1 - 2 v_1)}, \quad \mu_1 = \frac{E_1}{2 (1 + v_1)} \quad (3.8)$$

2 no'lu katıya ait Lamé elastik sabitleri  $\lambda_2$  ve  $\mu_2$ :

$$\lambda_2 = \frac{v_2 E_2}{(1 + v_2)(1 - 2 v_2)}, \quad \mu_2 = \frac{E_2}{2 (1 + v_2)} \quad (3.9)$$

Karışım bileşenleri arasında herhangi bir kimyasal reaksiyon bulunmadığı düşünüldüğünde, kütlenin korunumu ilkesi gereğince, çok küçük şekil değiştirme durumu için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\rho_1 = \bar{\rho}_1(1 - e_{mm}), \quad \rho_2 = \bar{\rho}_2(1 - g_{mm}) \quad (3.10)$$

Burada  $\rho_1$  ve  $\rho_2$  şekil değiştirme sonucunda bileşenlerin sahip olacakları yeni yoğunluklarını göstermektedir. İkili karışım ortamı için denge denklemleri ise

$$\sigma_{ik,i} - p_k + F_k = 0, \quad \pi_{ik,i} + p_k + G_k = 0 \quad (3.11)$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemlerde bahsi geçen  $F_k$  ve  $G_k$  terimleri birim hacim başına karışım bileşenlerine gelen ağırlık kuvvetini tanımayan kütle kuvveti vektörleridir.

Karışımın bir bütün olarak davranışı tekil bir elastik sürekli ortamın mekanik davranışı ile benzerlik göstermektedir. Karışımlar teorisine göre de karışım sürekli ortamına ait toplam gerilme  $t_{ik} = \sigma_{ik} + \pi_{ik}$  şeklinde ifade edilir. Bileşenlere etki eden  $F_k$  ve  $G_k$  kütle kuvvetleri ihmal edildiği takdirde, bu toplam gerilme denkleminin  $X_i$ 'ye göre türevi (3.11)'deki denge denklemlerinin toplamına eşit olur. Bu sayede  $t_{ik,i} = 0$  ilişkisi elde edilir. Bu durumda,  $F_k$  ve  $G_k$  kütle kuvvetlerinin yokluğunda (3.4)-(3.6) denklemlerinden  $t_{ik,i} = 0$  ifadesi uyarınca aşağıdaki denklem elde edilir.

$$2(\mu_1 + \mu_3)e_{ik,i} + (\lambda_1 + \lambda_4)e_{mm,k} + 2(\mu_2 + \mu_3)g_{ik,i} + (\lambda_2 + \lambda_3)g_{mm,k} = 0 \quad (3.12)$$

Elde edilen bu denklem ve üzerinde çalışılan diğer denklemlerde karışım ortamını oluşturan her bir bileşenin ayrı ayrı izotropik olduğu ve buna bağlı olarak  $\lambda_5 = 0$  ifadesinin geçerli olduğu kabulü kullanılmaktadır. (3.3)'te bulunan  $e_{ik}$  ve  $g_{ik}$  şekil değiştirme tansörlerine ait ifadelerin de en son (3.12)'da elde edilen denge denkleminde dahil edilmesiyle, karışım ortamına ait yer değiştirme denklemleri (3.13)'deki gibi vektörel formda ifade edilebilir.

$$(\mu_1 + \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + (\mu_2 + \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} + (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) = 0 \quad (3.13)$$

Aynı şekilde aşağıdaki şekil değiştirme – yer değiştirme ve gerilme – yer değiştirme ilişkilerini temsil eden bağıntılar aşağıdaki tansörel formlarda yazılabilir. Bu ifadelerdeki  $\mathbf{I}$  birim tansördür.

$$2\mathbf{e} = \nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}^{(1)})^T, \quad 2\mathbf{g} = \nabla \mathbf{u}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}^{(2)})^T \quad (3.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} = e_{mm}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)} = g_{mm} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} + \alpha_2 \mathbf{I} = & \lambda_1 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{I} + \mu_1 [\nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}^{(1)})^T] \\ & + \lambda_3 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) \mathbf{I} + \mu_3 [\nabla \mathbf{u}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}^{(2)})^T] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi} - \alpha_2 \mathbf{I} = & \lambda_2 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) \mathbf{I} + \mu_2 [\nabla \mathbf{u}^{(2)} + (\nabla \mathbf{u}^{(2)})^T] \\ & + \lambda_4 (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \mathbf{I} + \mu_4 [\nabla \mathbf{u}^{(1)} + (\nabla \mathbf{u}^{(1)})^T] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\mathbf{p} = \frac{\bar{\rho}_1 \alpha_2}{\bar{\rho}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) + \frac{\bar{\rho}_2 \alpha_2}{\bar{\rho}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) \quad (3.18)$$

### 3.2 Bünye Denklemlerindeki Bilinmeyen Katsayılarının Hesaplanması

Karışım ortamının davranışını matematik diliyle ifade eden bünye denklemlerinde yer alan  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_2$  ve  $\mu_2$  katsayılarının bileşenlere ait Lamé elastik sabitleri olarak düşünüldüğü belirtilmişti. Bunların dışında, bilinmeyen fakat bileşenler arasındaki

etkileşimlerle de ilgili olan  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayılarının tespiti amacıyla üç basit deneyin matematiksel sonuçlarından yararlanacağız.

### 3.2.1 Basit çekme problemi

Elastik bir numuneye **X** doğrultusunda çekme kuvveti uygulandığında probleme ait

gerilme tansörü  $\begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  şeklinde ( $t_{11} = \sigma$ ) yazılabilir. Bu numunenin iki

elastik katıdan oluşan bir karışım olduğu düşünülürse,  $t_{ij}$  gerilme bileşeni  $t_{ij} = \sigma_{ij} + \pi_{ij}$  bağıntısı uyarınca ortamın toplam gerilmesini temsil eder. (3.4) ve (3.5) numaralı bünye denklemleri hatırlandığında deneye ait x-y-z doğrultularındaki gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} + \alpha_2 &= (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{11} + \lambda_1(e_{22} + e_{33}) + (\lambda_3 + 2\mu_3)g_{11} \\ &\quad + \lambda_3(g_{22} + g_{33}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} - \alpha_2 &= (\lambda_4 + 2\mu_3)e_{11} + \lambda_4(e_{22} + e_{33}) + (\lambda_2 + 2\mu_2)g_{11} \\ &\quad + \lambda_2(g_{22} + g_{33}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{22} + \alpha_2 &= (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{22} + \lambda_1(e_{11} + e_{33}) + (\lambda_3 + 2\mu_3)g_{22} \\ &\quad + \lambda_3(g_{11} + g_{33}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \pi_{22} - \alpha_2 &= (\lambda_4 + 2\mu_3)e_{22} + \lambda_4(e_{11} + e_{33}) + (\lambda_2 + 2\mu_2)g_{22} \\ &\quad + \lambda_2(g_{11} + g_{33}) \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} + \alpha_2 &= (\lambda_1 + 2\mu_1)e_{33} + \lambda_1(e_{11} + e_{22}) + (\lambda_3 + 2\mu_3)g_{33} \\ &\quad + \lambda_3(g_{11} + g_{22}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \pi_{33} - \alpha_2 &= (\lambda_4 + 2\mu_3)e_{33} + \lambda_4(e_{11} + e_{22}) + (\lambda_2 + 2\mu_2)g_{33} \\ &\quad + \lambda_2(g_{11} + g_{22}) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Yukarıdaki gerilme ifadeleri için, daha öncesinde Steel (1968b) ve Dokuz (2005) tarafından da kullanılmış olan, y-z doğrultularındaki toplam gerilmelerin sıfıra eşit

olduğu kabulü  $\sigma_{22} + \alpha_2 = \pi_{22} - \alpha_2 = \sigma_{33} + \alpha_2 = \pi_{33} - \alpha_2 = 0$  alınsın. Bu durumda  $e_{22}$ ,  $e_{33}$ ,  $g_{22}$  ve  $g_{33}$  şekil değiştirme tansörleri (3.19)-(3.24) denklemleri kullanılarak  $e_{11}$  ve  $g_{11}$  cinsinden çekilebilir.

$$e_{33} = e_{22}, \quad g_{33} = g_{22} \quad (3.25)$$

$$e_{22} = \frac{1}{2k} \{ [\lambda_4(\lambda_3 + \mu_3) - \lambda_1(\lambda_2 + \mu_2)]e_{11} + (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)g_{11} \} \quad (3.26)$$

$$g_{22} = \frac{1}{2k} \{ (\lambda_1\mu_3 - \lambda_4\mu_1)e_{11} + [\lambda_3(\lambda_4 + \mu_3) - \lambda_2(\lambda_1 + \mu_1)]g_{11} \} \quad (3.27)$$

Buradaki k katsayısı

$$k = (\lambda_1 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_2) - (\lambda_3 + \mu_3)(\lambda_4 + \mu_3) \quad (3.28)$$

olarak tanımlıdır.  $e_{22}$  ve  $g_{22}$  şekil değiştirme tansörlerine dair (3.26) ve (3.27)'de elde edilen bu ifadelerin (3.19) ve (3.20)'nin toplamından oluşan  $\sigma_{11} + \pi_{11} = \sigma$  bağıntısında yerine konulması sonucu karışım ortamına ait E Young Modülü aşağıdaki mantık kullanılarak elde edilir.

$$E\varepsilon_{11} = E_1e_{11} + E_2g_{11} \quad (3.29)$$

Burada ifade edilen E, Hooke Yasası'na ( $\sigma = E \varepsilon_{11}$ ) benzer olarak, iki elastik katı karışımının karakteristik özelliklerini taşıyan eşdeğer tekil bir elastik malzemenin Young Modülü olup  $\varepsilon_{11}$  de bu eşdeğer malzemenin x doğrultusundaki şekil değiştirme tansörüdür.  $E_1$  ve  $E_2$  katsayıları ise

$$E_1 = \lambda_1 + \lambda_4 + 2(\mu_1 + \mu_3) + \frac{1}{k} \{ (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1\mu_3 - \lambda_4\mu_1) + (\lambda_1 + \lambda_4)[\lambda_4(\lambda_3 + \mu_3) - \lambda_1(\lambda_2 + \mu_2)] \} \quad (3.30)$$

$$E_2 = \lambda_2 + \lambda_3 + 2(\mu_2 + \mu_3) + \frac{1}{k} \{ (\lambda_1 + \lambda_4)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) + (\lambda_2 + \lambda_3)[\lambda_3(\lambda_4 + \mu_3) - \lambda_2(\lambda_1 + \mu_1)] \} \quad (3.31)$$

ilişkilerini temsil etmektedir.

### 3.2.2 Kayma gerilmesi problemi

Basit kayma gerilmesi probleminde gerilme tansörü bileşenleri  $[t_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(veya indis formatında  $t_{12} = t_{21} = \tau$ ) şeklindedir. Bu gerilme durumu için (3.4) ve (3.5)'teki bünye denklemleri kullanılarak karışım malzemesine ait toplam kayma gerilmesi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\tau = \sigma_{12} + \pi_{12} = 2(\mu_1 + \mu_3)e_{12} + 2(\mu_2 + \mu_3)g_{12} \quad (3.32)$$

Buna ek olarak, Hooke Yasası uyarınca  $\tau = 2\mu \varepsilon_{12}$  kullanılarak karışım ortamına ait  $\varepsilon_{12}$  şekil değiştirme tansörü de aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mu \varepsilon_{12} = (\mu_1 + \mu_3)e_{12} + (\mu_2 + \mu_3)g_{12} \quad (3.33)$$

Bu ifadede geçen  $\mu$  terimi karışım ortamına eşdeğer olan tekil malzemenin kayma modülünü temsil etmektedir.

### 3.2.3 Hidrostatik basınç problemi

Bu problem için matris formatında  $[t_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$  olarak gösterilen gerilme

tansörü bileşen formatında  $t_{11} = t_{22} = t_{33} = -p$  şeklinde ifade edilebilir. İfadede geçen  $p$  terimi karışım ortamına etki eden basıncı göstermektedir. Bu yükleme durumu için de (3.4) ve (3.5)'teki bünye denklemleri kullanılarak karışım ortamına ait toplam gerilme aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} -3p = \sigma_{mm} + \pi_{mm} &= [3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3)]e_{mm} \\ &+ [3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3)]g_{mm} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Buna ek olarak, klasik elastisite teorisinden tekil malzeme için bilinen  $-3p = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{mm}$  ilişkisi hatırlanırsa, karışım ortamına ait  $\varepsilon_{mm}$  şekil değiştirme tansörü de aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$(3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{mm} = [3(\lambda_1 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_3)]e_{mm} \\ + [3(\lambda_2 + \lambda_3) + 2(\mu_2 + \mu_3)]g_{mm} \quad (3.35)$$

Burada geçen  $\lambda$  terimi karışım ortamına eşdeğer olan tekil malzemenin Lamé elastik sabitidir.

Karışım bileşenlerinin birbirine göre herhangi bir bağıl yer değiştirmesinin olmadığı bir durumda, bu bileşenlerin yer değiştirme vektörleri arasındaki ilişki  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  olarak ifade edilebilir. Bu ifadede geçen  $\mathbf{w}$  terimi aynı zamanda karışım ortamına eşdeğer olan tekil malzemenin de yer değiştirme vektörünü temsil eder. Bu durumda karışım ortamının bileşenlerine ait ve eşdeğer tekil malzemeye ait şekil değiştirme tansörleri de  $e_{ij} = g_{ij} = \varepsilon_{ij}$  olarak gösterilir. Bu ilişki (3.29) (3.33) ve (3.35) bağıntılarında kullanıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$E = E_1 + E_2 \quad (3.36)$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3 \quad (3.37)$$

$$3\lambda + 2\mu = 3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + 2(\mu_1 + \mu_2 + 2\mu_3) \quad (3.38)$$

Elde edilen bu denklemler, bileşenleri bağıl hareket etmeyen bir elastik karışım ortamına ait  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  bünye katsayıları ile bu karışım ortamına eşdeğer karakteristik özellikler gösteren tekil bir elastik malzemenin  $\lambda$  ve  $\mu$  sabitleri arasındaki ilişkiyi vermektedir.

### 3.3 Karışım Ortamı İçin Galerkin Vektörü Çözümü

Karışım bileşenlerinin her birine ait yer değiştirmeleri arasındaki ilişkileri veren bir denklem sistemi daha önce Gürgöze ve Dokuz (1999, 2002)'un çalışmalarında Hemholtz teoremi kullanılarak elde edilmiştir. Bu denklem sistemi Navier denklemlerine benzeyen iki adet denklemden oluşmaktadır. Burada ise karışım ortamına ait  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörleri arasındaki ilişkiyi veren (3.13) denklemini sağlayabilmek amacıyla aşağıdaki (3.39) ve (3.40) ifadeleri önerilmiştir.

$$\mathbf{u}^{(1)} = A_1 \nabla^2 \mathbf{F}_1 - B_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_1) \quad (3.39)$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = A_2 \nabla^2 \mathbf{F}_2 - B_2 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}_2) \quad (3.40)$$

Bu ifadelerde kullanılan  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  ve  $B_2$  terimleri keyfi sabitleri temsil etmektedir.  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörleri arasındaki (3.13) ilişkisinin iki Navier denkleminin toplamına benzemesi nedeniyle  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  fonksiyonlarının Galerkin vektörleri olarak düşünülmesi uygundur. Burada (3.39) ve (3.40)'daki  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  ifadelerinin (3.13)'te yerlerine yerleştirilmesi, bizi

$$\begin{aligned} & (\mu_1 + \mu_3)A_1 \nabla^4 \mathbf{F}_1 \\ & + [-(\mu_1 + \mu_3)B_1 + (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)(A_1 - B_1)] \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_1)] \\ & + (\mu_2 + \mu_3)A_2 \nabla^4 \mathbf{F}_2 \\ & + [-(\mu_2 + \mu_3)B_2 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)(A_2 - B_2)] \nabla[\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_2)] = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

denkleminde ulaştırır.  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  ve  $B_2$  keyfi sabitler olduklarına göre, (3.41) denkleminde ortaya çıkan  $\nabla[\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{F}_{(\beta)})]$  terimlerini sıfıra eşitleyecek şekilde seçilmeleri de mümkündür. Bu durumda (3.41)'in sadeleşmiş hali olarak

$$(\mu_1 + \mu_3)A_1 \nabla^4 \mathbf{F}_1 + (\mu_2 + \mu_3)A_2 \nabla^4 \mathbf{F}_2 = 0 \quad (3.42)$$

denklemini elde edilir. Bu sadeleştirmeye vesile olan  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  keyfi sabitleri ise aşağıda verilmektedir.

$$A_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_4 + 2(\mu_1 + \mu_3)}{2(\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3)(\mu_1 + \mu_3)}, \quad B_1 = \frac{1}{2(\mu_1 + \mu_3)} \quad (3.43)$$

$$A_2 = \frac{\lambda_2 + \lambda_3 + 2(\mu_2 + \mu_3)}{2(\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_2 + \mu_3)}, \quad B_2 = \frac{1}{2(\mu_2 + \mu_3)} \quad (3.44)$$

Bu sayede karışım bileşenlerine ait  $\mathbf{u}^{(\beta)}$  yer değiştirme vektörleri,  $\mathbf{F}_{(\beta)}$  Galerkin vektörlerinin de yardımıyla (3.42)'deki eşitliği sağlayabilmektedir.

Bu noktadan sonra işlem kolaylığı sağlamak amacıyla, aksi bir ihtiyaç söz konusu olmadığı müddetçe, karışım parçacıklarının konumlarını belirten parametreler için  $x$ ,  $y$  ve  $z$  kullanılacak ve indis notasyonu kullanılmayacaktır.

### 3.4 Karışım Ortamı İçin Love Şekil Değiştirme Fonksiyonu

Eksenel simetrik gerilme uygulamaları söz konusu olduğunda,  $F_{(\beta)}$  Galerkin vektörlerinin yerine bu vektörlerin özel bir durumu olan Love şekil değiştirme fonksiyonları kullanılabilir. Bu fonksiyonların özelliği ise kütle kuvvetlerinin ihmal edildiği durumlarda biharmonik fonksiyon olarak tanımlanabilmeleridir. Bu da sınır şartlarını sağlayan uygun biharmonik fonksiyonların bulunması halinde, eksenel simetrik problemin çözülebileceği anlamına gelmektedir.

$F_1$  ve  $F_2$  Galerkin vektörleri,  $Z_1(x, y, z)$  ve  $Z_2(x, y, z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$F_1 = Z_1(x, y, z)e_3, \quad F_2 = Z_2(x, y, z)e_3 \quad (3.45)$$

Eksenel simetrik bir problem için (3.42) denklemini sağlayacak olan  $F_1$  ve  $F_2$  Galerkin vektörleriyle ilişkili olan Love şekil değiştirme fonksiyonları, (2.28)'de verildiği üzere,

$$\nabla^4 Z_1 = 0, \quad \nabla^4 Z_2 = 0 \quad (3.46)$$

biharmonik denklemlerini sağlamalıdır. Bu durumda (3.18), (3.39) ve (3.40) denklemlerindeki yer değiştirme vektörleri ve difüzyon kuvveti, Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned} u_x^{(\beta)} &= -B_{(\beta)} \frac{\partial^2 Z_{(\beta)}}{\partial x \partial z}, & u_y^{(\beta)} &= -B_{(\beta)} \frac{\partial^2 Z_{(\beta)}}{\partial y \partial z}, \\ u_z^{(\beta)} &= A_{(\beta)} \nabla^2 Z_{(\beta)} - B_{(\beta)} \frac{\partial^2 Z_{(\beta)}}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$p_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad p_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad p_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (3.48)$$

burada

$$\Pi = \frac{\alpha_2}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 [\bar{\rho}_1 (A_2 - B_2) Z_2 + \bar{\rho}_2 (A_1 - B_1) Z_1] \quad (3.49)$$

Aynı şekilde birinci elastik katıya ait (3.16) denkleminde bulunan gerilme ifadeleri de Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden yazıldığı takdirde (3.50)-(3.55) denklemleri elde edilir.

$$\sigma_{xx} + \alpha_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_1 (A_1 - B_1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_3 (A_2 - B_2) \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (B_1 \mu_1 Z_1 + B_2 \mu_3 Z_2) \right] \quad (3.50)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = -2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} (B_1 \mu_1 Z_1 + B_2 \mu_3 Z_2) \quad (3.51)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_1 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_3 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (B_1 \mu_1 Z_1 + B_2 \mu_3 Z_2) \right] \quad (3.52)$$

$$\sigma_{yy} + \alpha_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_1 (A_1 - B_1) \nabla^2 Z_1 + \lambda_3 (A_2 - B_2) \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (B_1 \mu_1 Z_1 + B_2 \mu_3 Z_2) \right] \quad (3.53)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_1 A_1 \nabla^2 Z_1 + \mu_3 A_2 \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (B_1 \mu_1 Z_1 + B_2 \mu_3 Z_2) \right] \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} + \alpha_2 = & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [\lambda_1 (A_1 - B_1) + 2\mu_1 A_1] \nabla^2 Z_1 \right. \\ & \left. + [\lambda_3 (A_2 - B_2) + 2\mu_3 A_2] \nabla^2 Z_2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} (B_1 \mu_1 Z_1 + B_2 \mu_3 Z_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Elde edilen bu (3.50)-(3.55) denklemleri aynı şekilde ikinci elastik katı için de geçerlidir. Bunun gerçekleşebilmesi için ise bu ifadelerdeki  $\lambda_1$ ,  $\lambda_3$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_3$  ve  $\alpha_2$  katsayıları sırasıyla  $\lambda_4$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_2$  ve  $-\alpha_2$  katsayıları ile değiştirilmelidir.

Son olarak tüm bu hesaplamalara karışım bileşenlerinin yüzey ( $S_1$  ve  $S_2$ ) ve hacim oranları ( $V_1$  ve  $V_2$ ) da dahil edilmiştir (Rajagopal ve Tao, 1995).

$$\alpha = \frac{\rho_1}{\bar{\rho}_1} = \frac{\delta V_1}{\delta V} = \frac{\delta S_1}{\delta S}, \quad 1 - \alpha = \frac{\rho_2}{\bar{\rho}_1} = \frac{\delta V_2}{\delta V} = \frac{\delta S_2}{\delta S} \quad (3.56)$$

Karışım ortamını oluşturan elastik katıların, hacim oranlarına bağlı olacak şekilde  $P(x, y, z)$  sınır yüklerine maruz kaldıkları kabul edilmektedir. Uygulanacak kuvvetin yarı-sonsuz bir yüzey üzerine düşey olarak etki edeceğini varsaydığımız takdirde, buna uygun sınır koşulları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{zz} + \alpha_2)|_{z=0} &= \alpha P(x, y), & (\pi_{zz} - \alpha_2)|_{z=0} &= (1 - \alpha)P(x, y) \\
 \sigma_{xz}|_{z=0} &= 0, & \pi_{xz}|_{z=0} &= 0, & \sigma_{yz}|_{z=0} &= 0, & \pi_{yz}|_{z=0} &= 0 \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

#### 4. KARIŞIM ORTAMI İÇİN SİNÜZOİDAL YAYILI YÜK PROBLEMİ

##### 4.1 Bileşenleri Birbirine Göre Bağlı Hareket Edebilen Karışım İçin Çözüm

Karışım ortamı bileşenlerine ait  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  bünye katsayıları ile bu karışım ortamına mekanik anlamda eşdeğer tekil elastik bir malzemenin  $\lambda$  ve  $\mu$  sabitleri arasında, bileşenlerin yer değiştirme vektörlerinin birbirine eşit olduğu  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  durumu için, (3.36)-(3.38) bağıntıları elde edilmişti. İki elastik katı karışımından oluşan ortamlara ait uygulamalar açısından kısıtlı sayıda çözümün söz konusu olduğu literatüre katkı sağlamak ve (3.36)-(3.38) bağıntılarının vereceği bilinmeyen katsayı değerlerini görebilmek amacıyla, örnek bir uygulama olarak karışım yarı-sonsuz uzayına etkiyen sinüzoidal yayılı yük problemi ele alınacaktır. Genel bir çözüm elde edebilmek amacıyla, ilk etapta  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  kısıtlaması dikkate alınmaksızın, bileşenlerin bağlı hareket edebildikleri durum için  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  Galerkin vektörleri ve  $Z_1(x,y,z)$  ve  $Z_2(x,y,z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonları ile (3.57)'deki sınır koşulları kullanılacaktır.

İki izotropik elastik katıdan oluşan bir karışım ortamı için  $z \geq 0$  aralığını kapsayan yarı-sonsuz bir karışım uzayının (Şekil 2.2) yüzeyine düşey olarak etki eden sinüzoidal yayılı bir  $P(x,y)$  yükü düşünölsün.

$$P(x,y) = R \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad (4.1)$$

Bu  $P(x,y)$  yayılı yük ifadesinde yer alan  $l$ ,  $L$  ve  $R$  terimleri, ikinci bölümde de olduğu gibi, keyfi sabitleri temsil etmektedirler.

Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden verilen (3.50)-(3.55) gerilme bağıntılarının (4.1) ile temsil edilen yayılı yük için  $z = 0$  yüzeyinde (3.57) sınır koşullarını sağlaması ve  $z \rightarrow \infty$  olurken sıfıra yakınsaması gerekir.  $Z_1(x,y,z)$  ve  $Z_2(x,y,z)$  fonksiyonlarının (3.46) uyarınca biharmonik fonksiyonlar olmak zorunluluğu bulunduğuna göre, daha önce bu koşulu sağladığı gösterilmiş olan, (2.29) bağıntısı burada da kullanılabilir.

$$Z_\beta = (D_{\beta 1} + D_{\beta 2}z) \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi y}{L} f(z) \quad (4.2)$$

$Z_\beta$  ( $\beta=1,2$ ) kabulünde geçen  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$  ve  $D_{22}$  katsayıları keyfi sabitlerdir. İkinci bölümde verilen işlemlerin benzerleri bizi (2.34) ile verilen sonuca götürecektir. Buna göre,  $\gamma = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$ ,  $\eta_1 = \pi/l$ ,  $\eta_2 = \pi/L$  tanımları yapıldığında  $Z_\beta$  Love şekil değiştirme fonksiyonları için aşağıdaki formu kullanmak uygun olacaktır.

$$Z_\beta = (D_{\beta 1} + D_{\beta 2}z) \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.3)$$

(3.57)'deki sınır koşullarında bahsi geçen  $\sigma_{xz}$ ,  $\pi_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\pi_{yz}$ ,  $(\sigma_{zz} + \alpha_2)$  ve  $(\pi_{zz} - \alpha_2)$  gerilme bileşenlerini bulmak amacıyla, (4.3)'te verilen  $Z_\beta$  terimini (3.50)–(3.55) denklemlerinde yerlerine yerleştirilirse  $D_{11}$ ,  $D_{12}$ ,  $D_{21}$ ,  $D_{22}$  keyfi sabitleri için dört farklı lineer denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & -R\alpha - (A_1 - B_1)\gamma^2(-3D_{12} + D_{11}\gamma)(\lambda_1 + 2\mu_1) \\ & + \frac{(l^2 + L^2)\pi^2(D_{12} - D_{11}\gamma)(B_1\lambda_1 - A_1(\lambda_1 + 2\mu_1))}{l^2L^2} - (A_2 \\ & - B_2)\gamma^2(-3D_{22} + D_{21}\gamma)(\lambda_3 + 2\mu_3) \\ & + \frac{(l^2 + L^2)\pi^2(D_{22} - D_{21}\gamma)(B_2\lambda_3 - A_2(\lambda_3 + 2\mu_3))}{l^2L^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R(-1 + \alpha) + (A_2 - B_2)\gamma^2(3D_{22} - D_{21}\gamma)(\lambda_2 + 2\mu_2) \\ & + \frac{(l^2 + L^2)\pi^2(D_{22} - D_{21}\gamma)(B_2\lambda_2 - A_2(\lambda_2 + 2\mu_2))}{l^2L^2} \\ & + (A_1 - B_1)\gamma^2(3D_{12} - D_{11}\gamma)(\lambda_4 + 2\mu_3) \\ & + \frac{(l^2 + L^2)\pi^2(D_{12} - D_{11}\gamma)(B_1\lambda_4 - A_1(\lambda_4 + 2\mu_3))}{l^2L^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{lL} (2B_1l^2L^2\gamma(-2D_{12} + D_{11}\gamma)\mu_1 + A_1(2D_{12}l^2L^2\gamma + D_{11}(L^2\pi^2 + l^2(\pi^2 \\ & - L^2\gamma^2)))\mu_1 + (2B_2l^2L^2\gamma(-2D_{22} + D_{21}\gamma) + A_2(2D_{22}l^2L^2\gamma \\ & + D_{21}(L^2\pi^2 + l^2(\pi^2 - L^2\gamma^2))))\mu_3) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{lL} (2B_2 l^2 L^2 \gamma (-2D_{22} + D_{21} \gamma) \mu_2 + A_2 (2D_{22} l^2 L^2 \gamma + D_{21} (L^2 \pi^2 + l^2 (\pi^2 \\ - L^2 \gamma^2))) \mu_2 + (2B_1 l^2 L^2 \gamma (-2D_{12} + D_{11} \gamma) + A_1 (2D_{12} l^2 L^2 \gamma \\ + D_{11} (L^2 \pi^2 + l^2 (\pi^2 - L^2 \gamma^2)))) \mu_3) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Bu denklemlerin çözümlerine ise aşağıda yer verilmiştir.

$$D_{11} = \frac{m_1 R}{2\gamma^3}, \quad D_{12} = \frac{m_2 R}{2\gamma^2}, \quad D_{21} = \frac{n_1 R}{2\gamma^3}, \quad D_{22} = \frac{n_2 R}{2\gamma^2} \quad (4.5)$$

Bu çözümlerdeki  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  ve  $n_2$  terimlerinin açılımları ise aşağıdaki gibidir.

$$m_1 = - \frac{(A_1 - 2B_1)[\alpha(\lambda_2 + \mu_2) - (1 - \alpha)(\lambda_3 + \mu_3)]}{k(A_1 - B_1)B_1} \quad (4.6)$$

$$m_2 = \frac{\alpha(\lambda_2 + \mu_2) - (1 - \alpha)(\lambda_3 + \mu_3)}{k(A_1 - B_1)} \quad (4.7)$$

$$n_1 = \frac{(A_2 - 2B_2)[\alpha(\lambda_4 + \mu_3) - (1 - \alpha)(\lambda_1 + \mu_1)]}{k(A_2 - B_2)B_2} \quad (4.8)$$

$$n_2 = - \frac{\alpha(\lambda_4 + \mu_3) - (1 - \alpha)(\lambda_1 + \mu_1)}{k(A_2 - B_2)} \quad (4.9)$$

Aynı şekilde, (4.3)'teki  $Z_\beta$  fonksiyonları (3.47) denklemlerinde yerlerine yerleştirildiğinde,  $u_x^{(\beta)}$ ,  $u_y^{(\beta)}$  ve  $u_z^{(\beta)}$  yer değiştirme vektör bileşenleri için aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$u_x^{(\beta)} = B_\beta [-D_{\beta 1} \gamma + D_{\beta 2} (1 - \gamma z)] \eta_1 \sin(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.10)$$

$$u_y^{(\beta)} = B_\beta [-D_{\beta 1} \gamma + D_{\beta 2} (1 - \gamma z)] \eta_2 \sin(\eta_2 x) \cos(\eta_1 y) e^{-\gamma z} \quad (4.11)$$

$$u_z^{(\beta)} = [2\gamma(B_\beta - A_\beta)D_{\beta 2} - \gamma^2 B_\beta (D_{\beta 1} + D_{\beta 2} z)] \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.12)$$

(3.50)-(3.55) denklemlerinin birinci elastik katı bileşen için vereceği gerilmeler ise

$$\sigma_{xx} + \alpha_2 = 2 \left\{ \gamma^2 [D_{12} (A_1 - B_1) \lambda_1 + D_{22} (A_2 - B_2) \lambda_3] \right.$$

$$+ \eta_1^2 [(B_1 D_{12} \mu_1 + B_2 D_{22} \mu_3)(1 - \gamma z) - (B_1 D_{11} \mu_1 + B_2 D_{21} \mu_3) \gamma] \Big\} \\ \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.13)$$

$$\sigma_{xy} = 2\eta_1 \eta_2 [(B_1 D_{11} \mu_1 + B_2 D_{21} \mu_3) \gamma - (B_1 D_{12} \mu_1 + B_2 D_{22} \mu_3)(1 - \gamma z)] \\ \sin(\eta_1 x) \sin(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.14)$$

$$\sigma_{xz} = 2\eta_1 \gamma \left\{ D_{12} [A_1 - B_1(2 - \gamma z)] \mu_1 + D_{22} [A_2 - B_2(2 - \gamma z)] \mu_3 \right. \\ \left. + (B_1 D_{11} \mu_1 + B_2 D_{21} \mu_3) \gamma \right\} \sin(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.15)$$

$$\sigma_{yy} + \alpha_2 = 2 \left\{ \gamma^2 [D_{12} (A_1 - B_1) \lambda_1 + D_{22} (A_2 - B_2) \lambda_3] - \right. \\ \left. + \eta_2^2 [(B_1 D_{12} \mu_1 + B_2 D_{22} \mu_3)(1 - \gamma z) - (B_1 D_{11} \mu_1 + B_2 D_{21} \mu_3) \gamma] \right\} \\ \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.16)$$

$$\sigma_{yz} = 2\eta_2 \gamma \left\{ D_{12} [A_1 - B_1(2 - \gamma z)] \mu_1 + D_{22} [A_2 - B_2(2 - \gamma z)] \mu_3 \right. \\ \left. + (B_1 D_{11} \mu_1 + B_2 D_{21} \mu_3) \gamma \right\} \sin(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.17)$$

$$\sigma_{zz} + \alpha_2 = 2\gamma^2 \left\{ D_{12} (A_1 - B_1) \lambda_1 + D_{22} (A_2 - B_2) \lambda_3 \right. \\ \left. + (B_1 D_{11} \mu_1 + B_2 D_{21} \mu_3) \gamma + D_{12} [2A_1 - B_1(3 - \gamma z)] \mu_1 \right. \\ \left. + D_{22} [2A_2 - B_2(3 - \gamma z)] \mu_3 \right\} \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.18)$$

şeklinde elde edilmektedir. Karışım ortamındaki ikinci elastik katkıya ait  $\pi_{xx} - \alpha_2$  ,  $\pi_{xy}$  ,  $\pi_{xz}$  ,  $\pi_{yy} - \alpha_2$  ,  $\pi_{yz}$  ,  $\pi_{zz} - \alpha_2$  gerilme bileşenlerinin hesaplanabilmesi için,

(4.13)-(4.18)'deki ifadelerde aşağıdaki katsayı dönüşümlerinin yapılması yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}\{A_1, A_2, B_1, B_2\} &\rightarrow \{A_2, A_1, B_2, B_1\} \\ \{D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}\} &\rightarrow \{D_{21}, D_{22}, D_{11}, D_{12}\} \\ \{\alpha_2, \lambda_1, \lambda_3, \mu_1\} &\rightarrow \{-\alpha_2, \lambda_2, \lambda_4, \mu_2\}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Şekil değiştirmenin olmadığı ilk anda karışım bileşenlerinin  $\alpha_2 \neq 0$  olacak şekilde ( $\lambda_3 \neq \lambda_4$ ) bir kısmi gerilme taşıdıkları kabul edildiği için  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  difüzyon kuvveti bileşenleri de sıfırdan farklıdır. (3.48) ve (3.49) bağıntılarında (4.3)'teki  $Z_\beta$ 'nın kullanılması ile elde edilen difüzyon kuvveti bileşenleri aşağıda verilmektedir.

$$p_x = -\frac{2\eta_1\alpha_2\gamma^2}{\bar{\rho}} [D_{12}(A_1 - B_1)\bar{\rho}_2 + D_{22}(A_2 - B_2)\bar{\rho}_1] \sin(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.20)$$

$$p_y = -\frac{2\eta_2\alpha_2\gamma^2}{\bar{\rho}} [D_{12}(A_1 - B_1)\bar{\rho}_2 + D_{22}(A_2 - B_2)\bar{\rho}_1] \cos(\eta_1 x) \sin(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.21)$$

$$p_z = -\frac{2\alpha_2\gamma^3}{\bar{\rho}} [D_{12}(A_1 - B_1)\bar{\rho}_2 + D_{22}(A_2 - B_2)\bar{\rho}_1] \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (4.22)$$

#### 4.2 Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - NiAl Kompozitine Ait Deneysel Veriler ve Bileşenleri Bağlı Hareket Etmeyen Karışım Ortamı

Çalışmanın önceki kısımlarında elde etmiş olduğumuz analitik sonuçları deneysel verilerle ilişkilendirmek ve ortam davranışını görsel hale getirebilmek amacıyla Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-NiAl kompozitine ait Hsieh, Tuan ve Wu (2004) tarafından sağlanan deneysel verilerden (Çizelge 4.1) ve (Çizelge 4.2) yararlanacağız. Bu noktadan itibaren karışım bileşenlerinin birbirine göre bağlı harekete sahip olmadıkları, yani  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  koşulunun geçerli olduğu kabul edilecektir

Bağıntılarda yer alan  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  bilinmeyen bünye katsayılarının tespitinde  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  koşulu altında bulunan (3.36)-(3.38) denklemlerinden ve (4.10)-(4.22)

bağıntılarının  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  koşulu altında verdiği analitik çözümlerden yararlanılacaktır.

**Çizelge 4.1 :**  $\text{Al}_2\text{O}_3$  ve NiAl malzemelerine ait özellikler.

|                         | Teorik yoğunluk<br>( $\text{gr/cm}^3$ ) | Elastisite<br>Modülü (GPa) | Poisson<br>Oranı | Lamé katsayıları<br>(GPa)           |
|-------------------------|-----------------------------------------|----------------------------|------------------|-------------------------------------|
| NiAl                    | $\bar{\rho}_1 = 5.95$                   | 186                        | 0.31             | $\lambda_1 = 115.8$ $\mu_1 = 70.99$ |
| $\text{Al}_2\text{O}_3$ | $\bar{\rho}_2 = 3.98$                   | 401                        | 0.24             | $\lambda_2 = 149.3$ $\mu_2 = 161.7$ |

(Çizelge 4.2)'de  $\alpha = 0.6$  hacim oranındaki elastisite modülü ve Poisson oranı verilerine  $\alpha = 0.5$  hacim oranındaki verilere çok yakın oldukları için yer verilmemiştir.

**Çizelge 4.2 :**  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -NiAl kompozitinde NiAl'in farklı hacim oranları için deneysel sonuçlar.

| $\alpha$ (NiAl) | Elastisite Modülü (GPa) | Poisson Oranı | Lamé Katsayıları (GPa)          |
|-----------------|-------------------------|---------------|---------------------------------|
| 0.3             | 301                     | 0.238         | $\lambda = 110.4$ $\mu = 121.6$ |
| 0.4             | 293                     | 0.257         | $\lambda = 123.3$ $\mu = 116.5$ |
| 0.5             | 252                     | 0.272         | $\lambda = 118.2$ $\mu = 99.06$ |
| 0.7             | 235                     | 0.282         | $\lambda = 118.6$ $\mu = 91.65$ |

Sinüzoidal yayılı yük problemi için elde edilen (4.10)-(4.22) çözümleri genel anlamda, yani karışıma ait bileşenlerin eşit yer değiştirme yaptıkları  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  kısıtlaması konulmadan elde edilmişti. Geldiğimiz bu noktadaki temel amacımız, bileşenleri bağıl hareket etmeyen ortam kısıtlaması altında bulduğumuz (3.36)-(3.38) denklemlerinde  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -NiAl kompozitine ait deneysel verileri kullanarak bilinmeyen bünye katsayılarını tespit etmek ve bunlar vesilesiyle de karışım bileşenlerinin  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörlerini elde etmektir.

$\text{Al}_2\text{O}_3$ -NiAl kompozitine ait farklı  $\alpha$  hacimsel karışım oranlarındaki  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörleri birbirleri ile karşılaştırılmadan önce, ilk olarak,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ -NiAl kompozitini oluşturan bileşenler arasındaki etkileşimleri temsil eden  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  bünye katsayılarının bulunması gerekir. Bu amaçla (3.36)-(3.38) denklemlerinde (Çizelge 4.1) ve (Çizelge 4.2)'deki veriler kullanılarak çeşitli  $\alpha$  hacimsel karışım

oranları için  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  kompozitine ait  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  bünye katsayıları hesaplanmış ve (Çizelge 4.3)'te topluca verilmiştir.

**Çizelge 4.3 :** Farklı  $\alpha$  hacim oranları için hesaplanmış  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  (GPa) katsayıları.

| $\alpha$ | $\lambda_3$ | $\lambda_4$ | $\mu_3$ |
|----------|-------------|-------------|---------|
| 0.3      | -52.844     | -101.81     | -55.559 |
| 0.4      | -39.661     | -102.16     | -58.069 |
| 0.5      | -36.067     | -110.85     | -66.815 |
| 0.7      | -31.311     | -115.21     | -70.516 |

(Çizelge 4.1), (Çizelge 4.2) ve (Çizelge 4.3)'te gösterilen bünye katsayıları ile sinüzoidal yayılı yük probleminin (4.10)-(4.22) çözümlerine gidildiğinde farklı  $\alpha$  hacimsel karışım oranları için  $\mathbf{u}^{(1)}$ ,  $\mathbf{u}^{(2)}$ ,  $\mathbf{w}$  yer değiştirme,  $\mathbf{p}$  difüzyon kuvveti ve  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\pi}$ ,  $\mathbf{t}$  gerilme tansörlerine ait bileşenler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların değerlendirilmesi bir sonraki bölüme bırakılmakla birlikte bu noktada söylenebilecek en önemli husus, (4.10)-(4.22) çözümleri eşit yer değiştirme kısıtlaması dikkate alınmadan elde edildikleri halde (Çizelge 4.3)'teki veriler kullanıldığında yer değiştirme grafiklerinin anlamlı bir fark olmaksızın eşit çıkmasıdır. Bu ise bilinmeyen katsayılarla ilişkili (3.36)-(3.38) denklemlerinin doğruluğunu teyit anlamında önemli bir sonuçtur.



## 5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRMELER

Bu çalışmada, elastik katı karışımlarının anlaşılmasını kolaylaştırmak amacıyla, ilk olarak, tekil elastik ortama ait temel düşünceler verilmiş ve yer değiştirme problemini yöneten Navier denkleminin Galerkin vektörü ve onun özel bir hali olan Love şekil değiştirme fonksiyonu yardımıyla aldığı yeni form hesaplanmıştır. Ardından, bu yeni denklem yardımıyla tekil elastik ortama ait gerilme ve yer değiştirmelerin nasıl hesaplanacağı sinüzoidal yayılı yük problemi örneği için gösterilmiştir.

Daha sonra, iki elastik katıdan oluşan bir karışım ortamı için bileşenlere ait  $e_{ik}$  ve  $g_{ik}$  birim şekil değiştirme tansörleri,  $\sigma_{ik}$  ve  $\pi_{ik}$  gerilme tansörleri,  $p_k$  difüzyon kuvveti vektörü,  $u_k^{(1)}$  ve  $u_k^{(2)}$  yer değiştirme vektörlerine ait bağıntıların tanıtıldığı ve karışım bileşenleri arasındaki etkileşimi yöneten  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  terimleri ile bileşenlerin Lamé elastik sabitleri olarak tanımlanan  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_2$  ve  $\mu_2$  bünye katsayılarının belirtildiği (3.1)-(3.18) denklemleri geliştirilmiştir.

Ardından, karışım ortamının bilinmeyen bünye katsayıları olan  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  etkileşim terimlerini ortamın bilinen katsayılarından ( $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$ ) yararlanarak tespit etmek amacıyla bir inceleme gerçekleştirilmiştir. Bu amaca yönelik olarak karışım ortamına ait bir numune için basit çekme, basit kayma ve hidrostatik basınç deneylerinin matematiksel ifadeleri kullanılmıştır. Karışım bileşenlerinin bağıl hareket etmedikleri, yani  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$  olduğu koşulu altında elde edilen bağıntılar karışım ortamına eşdeğer mekanik davranış sergileyen bir tekil ortamın denklemleriyle ilişkilendirilerek  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ ,  $\mu_3$  katsayıları ve eşdeğer tekil ortama ait  $\lambda$ ,  $\mu$  sabitleri arasında (3.36)-(3.38) denklemlerinde belirtilen ilişkiler elde edilmiştir.

Bir sonraki aşamada, (3.29), (3.33) ve (3.35) denklemlerinin gerektirdiği üzere, karışım ortamı için de sinüzoidal yayılı yük problemi ele alınmıştır. İlk etapta problemin karışım ortamı için verilen çözümü en genel çözüm olup  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$  kısıtlamasından bağımsızdır. Bu aşamada Dokuz (2005) tarafından verilen ve aynı yükleme için eşdeğer tekil bir elastik malzemenin yer değiştirme vektörüyle ilişki kuran

$$\mu \mathbf{w} = (\mu_1 + \mu_3) \mathbf{u}^{(1)} + (\mu_2 + \mu_3) \mathbf{u}^{(2)} \quad (5.1)$$

tanımından yararlanılmıştır. Bu kapsamda,  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörlerini ihtiva eden (3.13) ifadesinin iki Navier denkleminin toplamına benzemesi sebebiyle, bu denkleme daha kolay çözüm geliştirebilmek amacıyla  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörleri (3.39)-(3.40)'ta  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  Galerkin vektörleri cinsinden ifade edilmiştir. (3.43) ve (3.44) ile verilen kabuller ise (3.42) denkleminde ulaşmamıza vesile olmuştur.

Eksenel simetrik gerilme uygulamalarında  $\mathbf{F}_1$  ve  $\mathbf{F}_2$  Galerkin vektörlerinin yine bu vektörlerin özel bir durumu olan  $Z_1(x,y,z)$  ve  $Z_2(x,y,z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden ifade edilebildiği bilgisinden yararlanarak (3.45) ve kütle kuvvetleri ihmal edildiğinde Love şekil değiştirme fonksiyonlarının her birinin biharmonik fonksiyon olacağı düşüncesiyle de (3.46) ilişkisi temin edilmiştir. Bu durumun bir neticesi olarak; karışım ortamına ait yer değiştirme, difüzyon kuvveti ve gerilme bileşenleri (3.47)-(3.55) denklemleriyle Love şekil değiştirme fonksiyonları cinsinden yeniden verilmiştir. Yarı-sonsuz bir karışıma ait yüzeye dik olarak etkiyen yüklemeler için gerekli sınır koşulları ise (3.57)'de listelenmiştir. Bu sınır koşullarına göre, karışım bileşenlerinin  $P(x,y)$  sınır yüküne hangi oranda maruz kaldıklarını belirleyen faktör Rajagopal ve Tao (1995) tarafından (3.56) ile verilen  $V_1$  ve  $V_2$  hacim oranları olmaktadır.

### 5.1 Sinüzoidal Yayılı Yük Problemi

Karışım bileşenleri arasında bağıl yer değiştirme olmadığı ve bu sebeple de bileşenlere ait yer değiştirme vektörlerinin birbirlerine eşit alındığı durum için hesaplanan  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  bünye katsayılarına dair (3.36)-(3.38) denklemlerinin doğruluğunu test etmek ve literatüre katkı sağlamak amacıyla, iki elastik katı karışımı için örnek bir uygulama olarak sinüzoidal yayılı yük problemi üzerinde çalışılmıştır. Problem, daha önce de belirtildiği üzere,  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$  kabulü yapılmaksızın karışım bileşenlerinin birbirinden farklı yer değiştirmeler yapabildiği genel durum için çözülmüştür. (3.36)-(3.38) bağıntıları ise bileşenlerin eşit yer değiştirmeleri düşüncesi altında elde edilmişti. Bu denklemlerin  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  kompozitine ait değerler için verdiği  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  katsayıları sinüzoidal yayılı yük probleminin genel çözümünde kullanıldığında yer değiştirmelerin  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}$  olacak

şekilde elde edildikleri gözlenmiştir. Bu da hem bilinmeyen bünye katsayılarını belirlememize yarayan (3.36)-(3.38) denklemlerinin hem de problem çözümünün doğruluğunu onaylayan bir sonuç olarak değerlendirilmektedir.

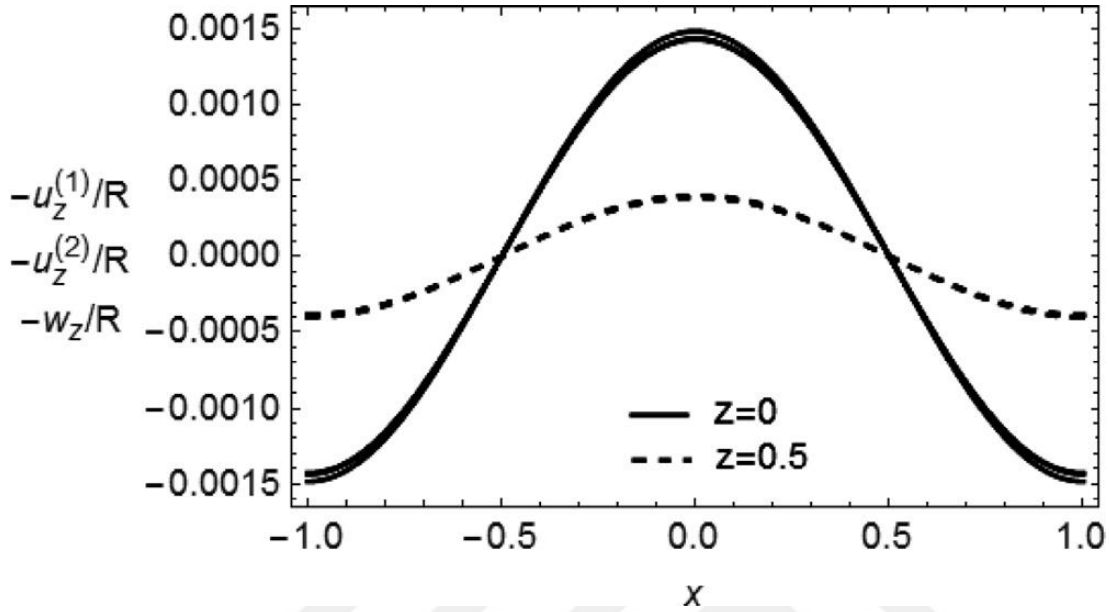
Bu kapsamda yayılı yük problemi için ilk olarak, gerilme sınır koşullarına da uygun olacak şekilde, yarı-sonsuz ( $z \geq 0$ ) bir karışım ortamının yüzeyine dik olarak etki eden  $P(x, y)$  kuvveti için (4.1)'deki gibi sinüzoidal bir yayılı yük kabulü yapılmıştır. Hesaplar sonucunda sinüzoidal yayılı yük probleminin çözümü olarak; (4.10)-(4.12)'de  $u_x^{(\beta)}$ ,  $u_y^{(\beta)}$  ve  $u_z^{(\beta)}$  yer değiştirme vektörleri, (4.13)-(4.18)'de birinci elastik katıya ait  $\sigma_{xx} + \alpha_2$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yy} + \alpha_2$ ,  $\sigma_{yz}$ ,  $\sigma_{zz} + \alpha_2$  gerilme bileşenleri, (4.19)'da ikinci elastik katıya ait  $\pi_{xx} - \alpha_2$ ,  $\pi_{xy}$ ,  $\pi_{xz}$ ,  $\pi_{yy} - \alpha_2$ ,  $\pi_{yz}$ ,  $\pi_{zz} - \alpha_2$  gerilme bileşenleri ve (4.20)-(4.22)'te iki elastik katı arasındaki  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  difüzyon kuvvetleri için nihai ifadeler elde edilmiştir.  $Al_2O_3$ -NiAl kompozitine ait veriler sinüzoidal yayılı yük problemine dair (4.10)-(4.22) ile verilen bu bağıntılarda kullanılarak ortam davranışı değerlendirilmektedir.

## 5.2 $Al_2O_3$ - NiAl Kompozitinin Verileri ve Sinüzoidal Yayılı Yük Problemi

Sinüzoidal yayılı yük probleminin çözümünü teşkil eden (4.10)-(4.22) ifadeleri, (Çizelge 4.1), (Çizelge 4.2) ve (Çizelge 4.3)'ten alınan bünye katsayısı değerleri ve bünye katsayıları arasındaki (3.36)-(3.38) ilişkileri beraber düşünülerek kompozite ait farklı  $\alpha$  hacimsel karışım oranları için  $u_k^{(1)}$ ,  $u_k^{(2)}$ ,  $w_k$  yer değiştirme,  $p_k$  difüzyon kuvveti ve  $\sigma_{ij}$ ,  $\pi_{ij}$ ,  $t_{ij}$  gerilme bileşenleri elde edilebilir.

$\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  ve  $\mu_3$  bünye katsayılarını tespit etmeye yarayan bağıntılar karışımı oluşturan bileşenler arasında bağıl yer değiştirme olmaması ( $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{w}$ ) kabulü altında verilmiştir. Buna karşılık, sinüzoidal yayılı yük problemi böyle bir kabul yapılmaksızın genel anlamda çözülerek  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirmeleri her bir bileşen için ayrı ayrı hesaplanmıştır. Bu durum hem (3.36)-(3.38) denklemlerinin hem de (4.10)-(4.22) çözümlerinin doğruluğunu test etme konusunda bir fırsat sağlamaktadır.  $Al_2O_3$ -NiAl kompozitine ait veriler kullanılarak, (3.36)-(3.38) bağıntıları yardımıyla hesaplanan bilinmeyen bünye katsayılarının dikkate alınması sonucunda  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirmelerinin, beklendiği üzere, anlamlı bir fark olmaksızın birbirine eşit çıktığı gözlenmiştir.

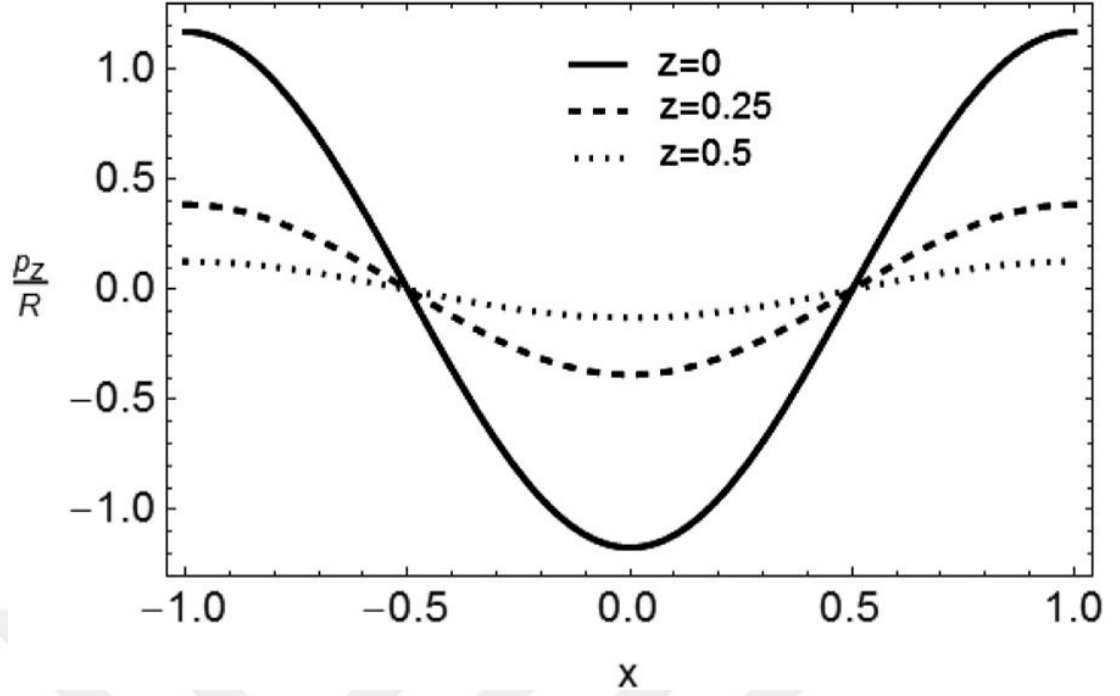
Bu durumu gösterebilmek amacıyla,  $\alpha = 0.4$  hacimsel oranı ve  $y = 0$ ,  $l = L = 1$  parametreleri için karışım bileşenlerinin ve eşdeğer tekil elastik malzemenin  $z$  doğrultusundaki  $u_z^{(1)}$ ,  $u_z^{(2)}$ ,  $w_z$  yer değiştirme bileşenleri hesaplanmış ve  $x$  ile değişimleri (Şekil 5.1)'de verilmiştir.



**Şekil 5.1 :** Yer değiştirmelerin düşey bileşenlerine ait değişimler.

Aradaki çok küçük farkın, karışımlar teorisinin temel sorunu olan sınır koşullarının ideal bir formunun olmamasından, yani bileşenlerin taşıdıkları yük oranlarının, burada kullanıldığı gibi, sadece hacim oranına bağlı yazılamayacağından ve verilerin deneysel nitelikte olmasından kaynaklandığı düşünülmektedir.

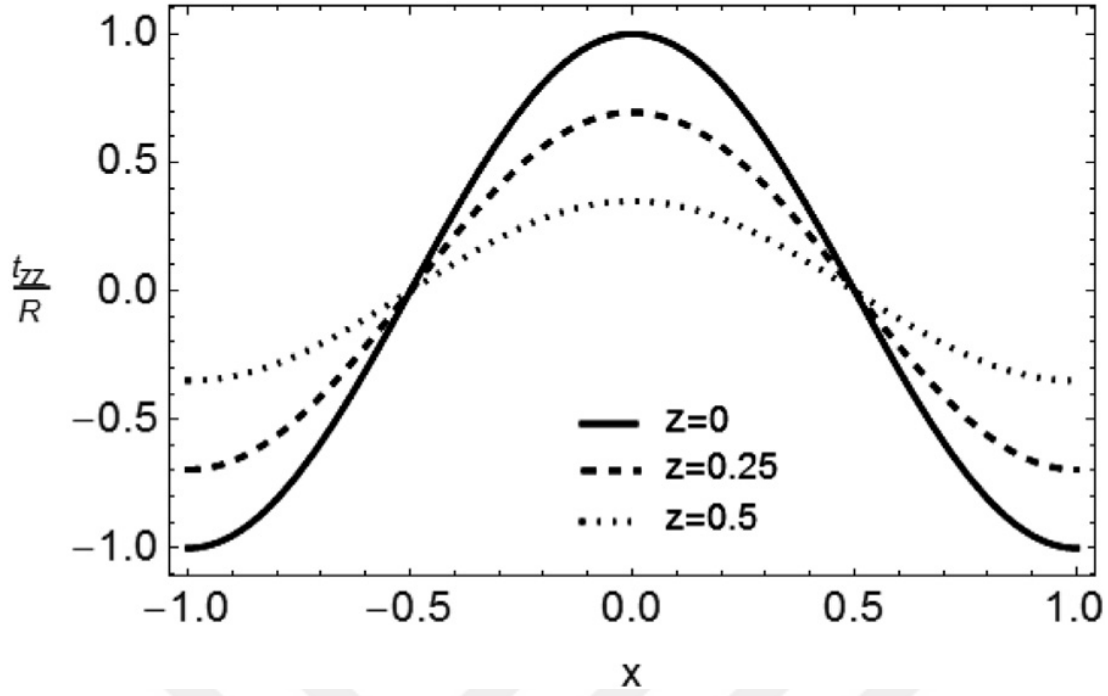
Karışım bileşenlerine ait  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme vektörlerinin incelenmesinin yanı sıra, yine karışım bileşenleri arasındaki  $\mathbf{p}$  difüzyon kuvveti vektörünün de  $\alpha = 0.4$ ,  $y = 0$ ,  $l = L = 1$  değerlerine karşı nasıl yanıt verdiği incelenmiştir. Bu bağlamda (Şekil 5.2)'te farklı  $z$  değerleri için difüzyon kuvveti vektörü  $p_z$ 'nin dağılımı gösterilmiştir.



**Şekil 5.2 :**  $p_z$ 'nin  $x$  doğrultusundaki değişimi.

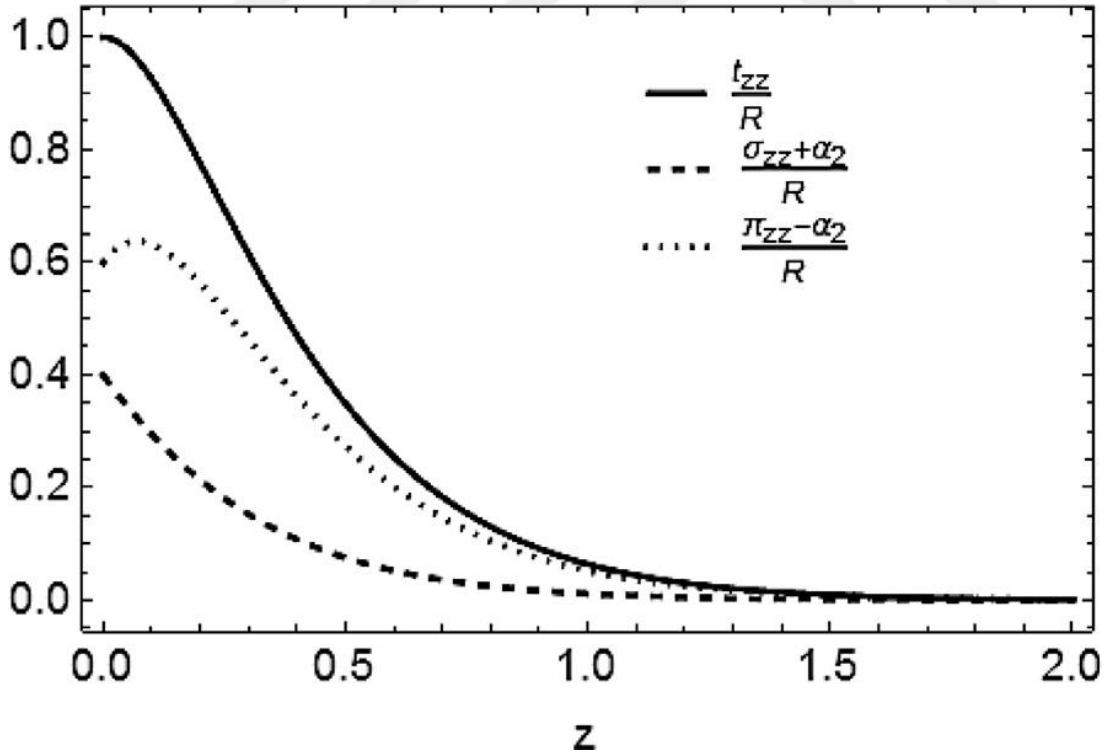
(Şekil 5.1) ve (Şekil 5.2)'de ortak olarak gözlemlenen durum ise  $z \rightarrow \infty$  'a giderken yer değiştirme ve difüzyon kuvveti alanlarının sıfıra yakınsadığıdır. Bu ise sinüzoidal yayılı yük problemi için öne sürülen (4.1)'deki  $P(x,y)$  ifadesi ve çözüm için kullanılan  $Z_1(x,y,z)$  ve  $Z_2(x,y,z)$  Love şekil değiştirme fonksiyonlarının probleme ait (3.57)'deki sınır koşullarıyla birlikte sağlaması beklenen bir durumdur.

Karışım bileşenlerine ait  $\sigma_{ij}$  ve  $\pi_{ij}$  gerilme tansörleri ile karışımın bütününe ait  $t_{ij} = \sigma_{ij} + \pi_{ij}$  olarak tanımlı  $t_{ij}$  toplam gerilme tansörü de aynı şekilde incelenmiştir. Bu kapsamda, (Şekil 5.3)'te farklı  $z$  değerleri için  $t_{zz}$  gerilme bileşeninin  $x$  doğrultusundaki değişimi, (Şekil 5.4)'te ise  $x = 0, y = 0$  konumu için  $\sigma_{zz}$ ,  $\pi_{zz}$  ve  $t_{zz}$  gerilmelerinin düşey  $z$  doğrultusundaki dağılımları gösterilmiştir.



Şekil 5.3 : Karışıma ait toplam gerilmenin normal bileşeni.

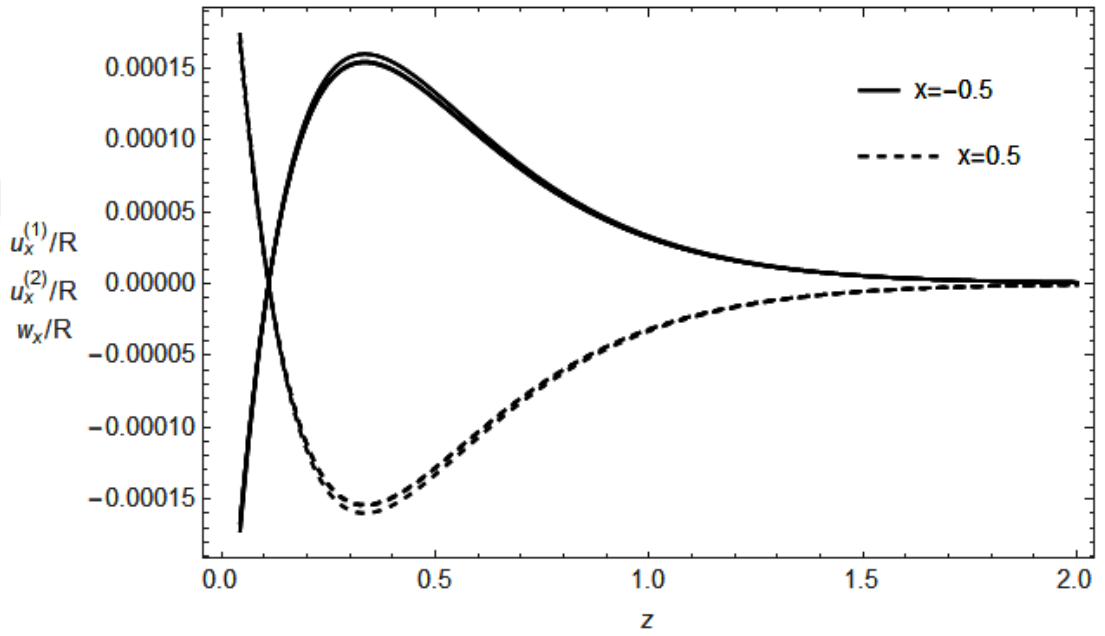
(Şekil 5.3)'teki  $t_{zz}$  gerilme bileşeninin tüm karışım ortamı için sergilediği davranış eşdeğer tekil elastik malzemeye ait gerilme değeri ile aynı özellikleri göstermektedir.



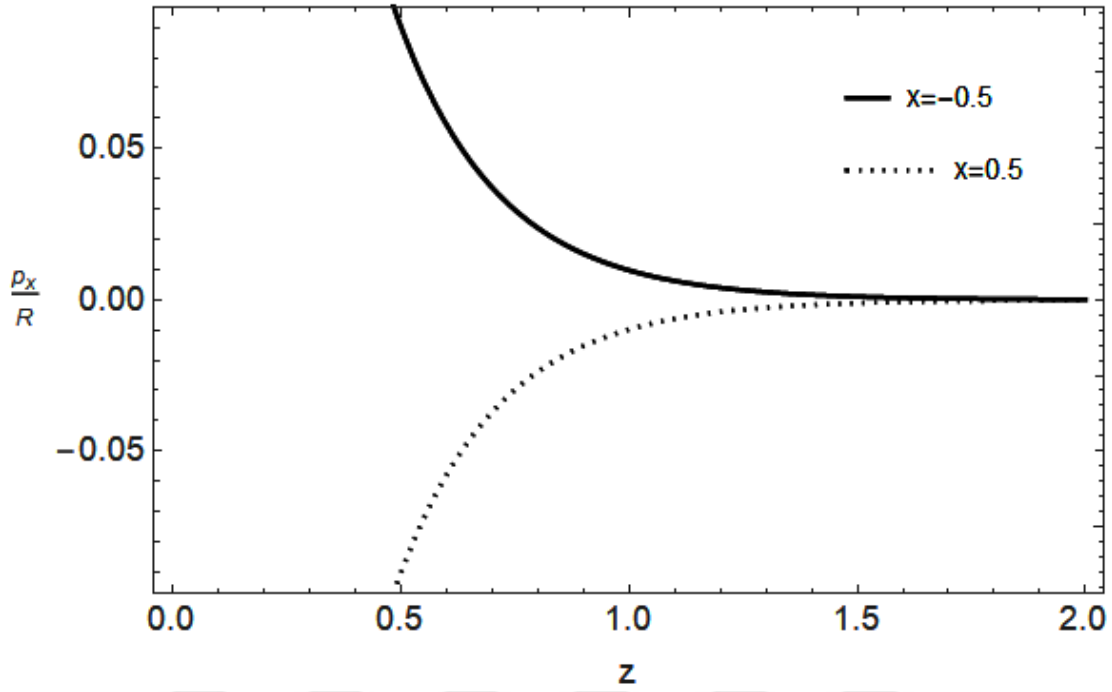
Şekil 5.4 : Tüm karışıma ve karışım bileşenlerine ait gerilme değerlerinin  $x=0, y=0$  konumu için  $z$  doğrultusundaki değişimleri.

(Şekil 5.4)'te karışım bileşenlerine ait  $\sigma_{zz}$  ve  $\pi_{zz}$  gerilme tansörlerinin, karışımı oluşturan bileşenlerin birbirleri ile etkileşimleri nedeniyle,  $t_{zz}$  gerilme değerinin klasik davranışına göre farklılıklar gösterdiği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte gerilme ifadelerinin tamamında, yer değiştirme ve difüzyon kuvveti vektörlerinde de karşılaşıldığı gibi,  $z \rightarrow \infty$  'a giderken sıfıra yakınsama durumu gözlemlenmektedir.

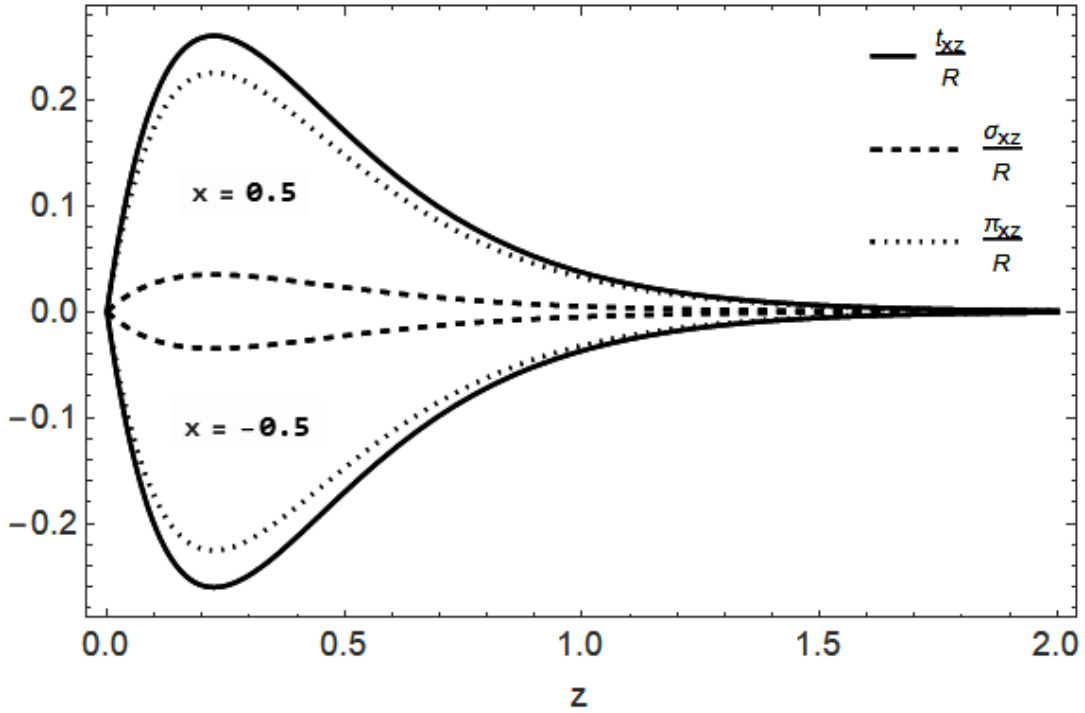
Yukarıdaki büyüklüklerin diğer doğrultulardaki değişimlerine de örnek olarak aşağıdaki (Şekil 5.5) (Şekil 5.6) (Şekil 5.7) grafikleri verilmektedir.



**Şekil 5.5 :** Tüm karışma ve karışım bileşenlerine ait yer değiştirme değerlerinin  $y=0$  konumu ve  $l=L=1$  değerleri için  $z$  doğrultusundaki değişimleri.



Şekil 5.6 :  $p_x$ 'nin  $z$  doğrultusundaki değişimi ( $y=0$  ve  $l=L=1$ ).



Şekil 5.7 : Tüm karışma ve karışım bileşenlerine ait kayma gerilmesi değerlerinin  $y=0$  konumu ve  $l=L=1$  değerleri için  $z$  doğrultusundaki değişimleri.

### 5.3 Hesaplamaların Kontrolü Amaçlı Alternatif Yaklaşımlar

Hesaplarımızda, (3.11)'deki bağıntılar yerine bunların toplamına karşılık gelen (3.13) denklemini sağlayan  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yer değiştirme alanları elde edilmeye çalışılmıştı. Bu sebeple difüzyon kuvveti vektörü ara hesaplar içerisinde doğrudan yer almamıştı. Burada ise, sinüzoidal yayılı yük problemi için yukarıdaki düşünceyle bulmuş olduğumuz sonuçları (3.11) denklem grubunun farkından oluşan ve  $\mathbf{p}$  difüzyon kuvveti vektörünün kendini gösterdiği (5.2) denkleminde yerine koyacağız.

$$(\mu_1 - \mu_3)\nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda_1 - \lambda_4 + \mu_1 - \mu_3)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) + (\mu_3 - \mu_2)\nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} + (\lambda_3 - \lambda_2 + \mu_3 - \mu_2)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) = 2\mathbf{p} \quad (5.2)$$

Bu denklem yardımıyla hesaplanan  $\mathbf{p}$ 'ye ait bileşenler (4.20)-(4.22)'deki difüzyon kuvveti bileşenleri ile form olarak benzerlik göstermekle birlikte katsayıları açısından tamamen farklı bir görünüme sahiptir.  $\mathbf{p}$ 'ye ait bileşenleri gösteren yeni ifadeler örnek olarak  $p_z$

$$p_z = -\gamma^3 \left\{ D_{12}[(A_1 - B_1)(\lambda_1 - \lambda_4 + \mu_1 - \mu_3) - B_1(\mu_1 - \mu_3)] + D_{22}[(A_2 - B_2)(\lambda_3 - \lambda_2 + \mu_3 - \mu_2) - B_2(\mu_3 - \mu_2)] \right\} \cos(\eta_1 x) \cos(\eta_2 y) e^{-\gamma z} \quad (5.3)$$

şeklinde bulunmaktadır. Bununla birlikte, difüzyon kuvvetlerine ait (4.20)-(4.22) sonuçlarında ve (5.2)'den elde edilen bağıntılarda  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  kompozitinden alınan veriler kullanıldığında, 0.3-0.4 hacimsel oran aralığı için her iki yöntemle elde edilen difüzyon kuvveti değerlerinin sayısal olarak birbirlerine çok yakın çıktıkları gözlenmektedir.  $\alpha = 0.4$ ,  $l = L = 1$  ve  $y = 0$  parametreleri için her iki düşünceyle elde edilen difüzyon kuvveti vektörü bileşenleri aşağıda verilmektedir.

(4.20)-(4.22) denklemlerinden elde edilen difüzyon kuvveti bileşenleri:

$$p_x = -0.8280R \sin(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z}, \quad p_y = 0, \quad p_z = -1.1709R \cos(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z} \quad (5.4)$$

(5.2) 'den elde edilen difüzyon kuvveti bileşenleri:

$$\begin{aligned} p_x &= -0.8359R \sin(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z}, & p_y &= 0, \\ p_z &= -1.1821R \cos(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Buna göre, (3.13) denklemini sağlayan  $\mathbf{u}^{(1)}$  ve  $\mathbf{u}^{(2)}$  yerdeğiştirme alanları Gürgöze ve Dokuz (1999) tarafından verilen (5.6)-(5.7) denklem sistemini de başarılı bir şekilde sağlamaktadır.

$$(\mu_1 + \mu_3) \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} + (\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)}) = 0 \quad (5.6)$$

$$(\mu_2 + \mu_3) \nabla^2 \mathbf{u}^{(2)} + (\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_2 + \mu_3) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{(2)}) = 0 \quad (5.7)$$

Ayrıca, karışım ortamına eşdeğer tekil elastik ortama ait gerilme ve yer değiştirme bileşenleri  $t_{ij} = \sigma_{ij} + \pi_{ij}$  ve (5.1) bağıntıları uyarınca hesaplanabilir. Bunlar ve tekil elastik ortamda sinüzoidal yayılı yük problemi için Fung (1968) tarafından verilen çözümlerin karşılaştırılması da ek bir kontrol imkânı sağlar.

$\alpha=0.4$  hacim oranı için  $\text{Al}_2\text{O}_3\text{-NiAl}$  kompozitine ait veriler kullanıldığında, hem karışıma eşdeğer tekil malzeme düşüncesiyle yapılan hesapların hem de  $E = 293 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.257$  ( $\lambda = 123.3 \text{ GPa}$ ,  $\mu = 116.5 \text{ GPa}$ ) elastik özelliklerine sahip bir elastik malzeme için klasik elastisite teorisi tarafından verilen çözümlerin tamamen aynı sonuçları işaret ettikleri gözlenmektedir. İlgili sonuçlar  $l = L = 1$  ve  $y = 0$  parametreleri için aşağıdaki verilmektedir.

$$t_{xx} = t_{yy} = R(0.757 - 2.22z) \cos(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z}, \quad (5.8)$$

$$t_{xy} = t_{yz} = 0, \quad (5.9)$$

$$t_{xz} = \pi R z \sin(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z}, \quad (5.10)$$

$$t_{zz} = R(1 + 4.44z) \cos(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z}, \quad (5.11)$$

$$w_x = R(0.0003 - 0.0030z) \sin(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z}, \quad w_y = 0, \quad (5.12)$$

$$w_z = -R(0.0014 + 0.0043z) \cos(\pi x) e^{-\sqrt{2}\pi z} \quad (5.13)$$

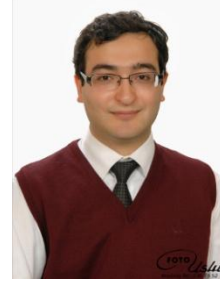
Bu sonuçlar da hesaplarımızın kontrolü açısından ek bir fırsat sağlamaktadır.

## KAYNAKLAR

- Atkin, R. J. ve Craine, R. E.** (1976). Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **29**, 209–245.
- Bedford, A. ve Drumheller, D. S.** (1983). Theory of immiscible and structured mixtures. *International Journal of Engineering Science*, **21**, 863–960.
- Bowen, R. M.** (1976). Theory of mixtures. In A. C. Eringen (Ed.), *Continuum physics*, III/1. New York: Academic Press.
- Bowen, R. M. ve Wiese, J. C.** (1969). Diffusion in mixtures of elastic materials. *International Journal of Engineering Science*, **7**, 689–722.
- Burchuladze, T. ve Svanadze, M.** (2000). Potential method in the linear theory of binary mixtures of thermoelastic solids. *Journal of Thermal Stresses*, **23**, 601–626.
- Ciarletta, M.** (1998). On mixtures of nonsimple elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, **36**, 655–668.
- Dokuz, M. S.** (2005). An analytical procedure to determine constitutive coefficients of a mixture of two linear elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, **42**, 805–817.
- Dokuz, M. S. ve Gürgöze, İ. T.** (2002). The Galerkin vector solution for a mixture of two elastic solids and Boussinesq problem. *International Journal of Engineering Science*, **40**, 211–222.
- Fung, Y. C.** (1968). *Foundations of solid mechanics*. New Delhi: Prentice-Hall.
- Green, A. E. ve Naghdi, P. M.** (1965). A dynamical theory of interacting continua. *International Journal of Engineering Science*, **3**, 231–241.
- Green, A. E. ve Steel, T. R.** (1966). Constitutive equations for interacting continua. *International Journal of Engineering Science*, **4**, 483–500.
- Gürgöze, İ. T. ve Dokuz, M. S.** (1999). Papkovitch-Neuber solution for a mixture of two elastic solids and Kelvin problem. *International Journal of Engineering Science*, **37**, 497–507.
- Hsieh, C. L., Tuan, W. H. ve Wu, T. T.** (2004). Elastic behaviour of a model two-phase material. *Journal of the European Ceramic Society*, **24**, 3789–3793.
- İeşan, D.** (1994). On the theory of mixtures of elastic solids. *Journal of Elasticity*, **35**, 251–268.
- İeşan, D.** (1997). A theory of mixtures with different constituent temperatures. *Journal of Thermal Stresses*, **20**, 147–167.

- Ieşan, D.** (2011). Prestressed composite modelled as interacting solid continua. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **12**, 513–524.
- Leseduarte, M. C. ve Quintanilla, R.** (2008). Saint-Venant decay rates for an anisotropic and non-homogeneous mixture of elastic solids in anti-plane shear. *International Journal of Solids and Structures*, **45**, 1697–1712.
- Muti, S. ve Dokuz, M. S.** (2015). Two-dimensional Beltrami–Michell equations for a mixture of two linear elastic solids and some applications using the Airy stress function. *International Journal of Solids and Structures*, **59**, 140–146.
- Passarella, F. ve Zampoli, V.** (2006). Some results on the spatial behavior of elastic mixtures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, **25**, 1031–1040.
- Rajagopal, K. R. ve Tao, L.** (1995). *Mechanics of mixtures*. Singapore: World Scientific.
- Rushchitsky, J. J.** (2008). On structural mixture theory applied to elastic isotropic materials with internal three-component nanoscale structure. *International Applied Mechanics*, **44**, 1233–1243.
- Rushchitskii, Y. Y.** (1996). On simple waves in solid mixtures. *Prikladnaya Mekhanika*, **32**, 40–45.
- Simchuk, Y. V. ve Priz, S. N.** (2010). A linear structural theory of isotropic three-component mixture. *International Applied Mechanics*, **46**, 763–770.
- Steel, T. R.** (1967a). Applications of a theory of interacting continua. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **20**, 57–72.
- Steel, T. R.** (1967b). Linearised theory of plane strain of a mixture of two solids. *International Journal of Engineering Science*, **5**, 775–789.
- Steel, T. R.** (1968a). Determination of the constitutive coefficients for a mixture of two solids. *International Journal of Solids and Structures*, **4**, 1149–1160.
- Steel, T. R.** (1968b). Linearized plane strain of a mixture of two elastic solids II. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **64**, 915–929.
- Truesdell, C. ve Toupin, R.** (1960). The classical field theories. In S. Flügge (Ed.), *Handbuch der Physik*, III/1. Berlin: Springer-Verlag.

## ÖZGEÇMİŞ



**Ad Soyad:** Nuri Kerem Binark

**Doğum Yeri ve Tarihi:** İstanbul / 31.10.1986

**E-posta:** binark@gmail.com

kerem.binark@marmara.edu.tr

**Lisans:** İstanbul Teknik Üniversitesi

**Mesleki Deneyim:**

2011 – \_ Araştırma Görevlisi / Marmara Üniversitesi Mühendislik Fakültesi

## TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR

**Binark, N. K. ve Dokuz M. S.** (2017). Analytical relations for the undetermined constitutive coefficients of a binary mixture of elastic solids with no relative component motion and an application for semi-infinite mixture continuum, *International Journal of Engineering Science*, **111**, 1-11.

Ms. Ref. No.: IJES-D-16-00468R1